Ludwig, Wilhelm

Lehrbuch der politischen arithmetik

Wien

1920

98-84450-6
MASTER NEGATIVE #

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DIVISION

BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET

ORIGINAL MATERIAL AS FILMED -- EXISTING BIBLIOGRAPHIC RECORD

330.1
L966

Ludwig, Wilhelm
Lehrbuch der politischen arithmetik, von Wilhelm Ludwig ... 4. aufl. Wien, Fromme, 1920.
iv, 198 p. tables. 23cm.

—— —— Hilfs-tabellen...4. aufl.

cover-title, 31 p. 23cm.

66140

TECHNICAL MICROFORM DATA

FILM SIZE: 35 mm REDUCTION RATIO: 12:1 IMAGE PLACEMENT: IA (IIA) IB IIB

DATE FILMED: 11/17/98 INITIALS: WW

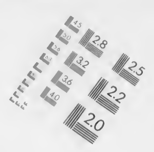
TRACKING #: 33374

FILMED BY PRESERVATION RESOURCES, BETHLEHEM, PA.

2.5 mm 1234567890

2.0 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

1.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890



PM-MGP
METRIC GENERAL PURPOSE TARGET PHOTOGRAPHIC

200 mm

150 mm

100 mm

1.0 1.1 1.25 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.5 2.8 3.2 3.6 4.0 4.5 5.0

1.0 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

1.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

2.0 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz 1234567890

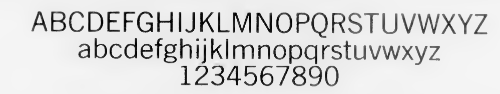
2.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz 1234567890

A5

A4

A3

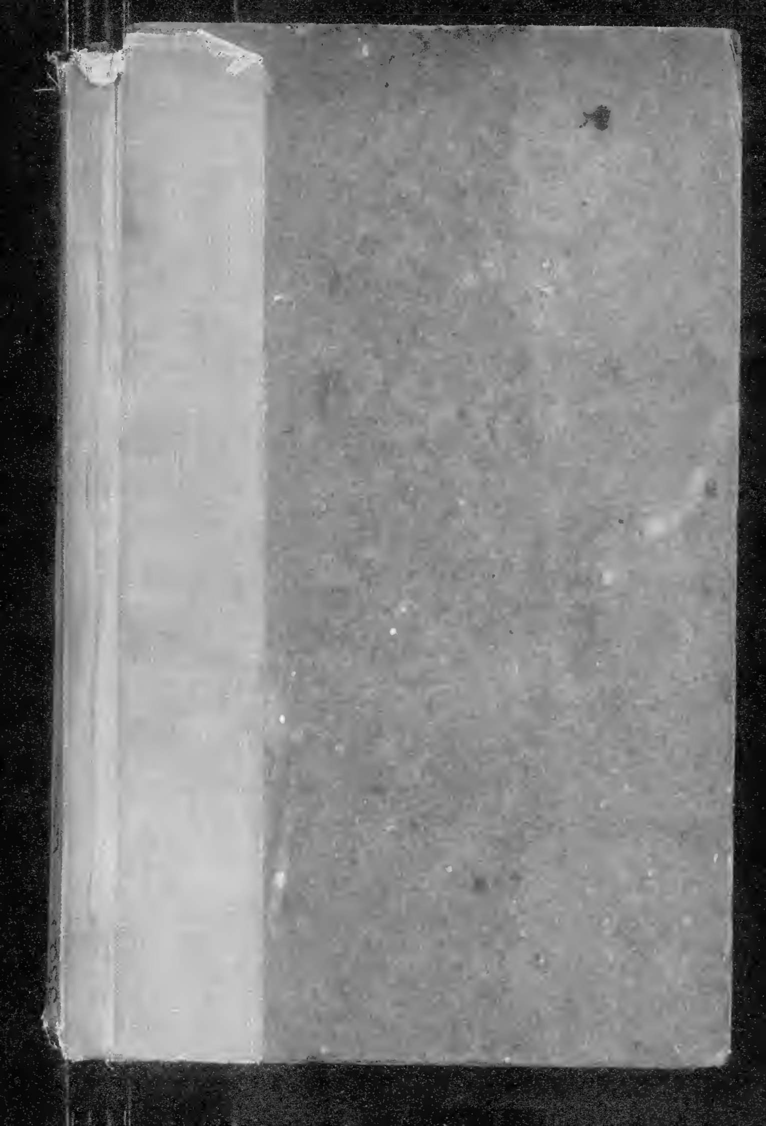
PRECISION℠ RESOLUTION TARGETS



A & P International
612/854-0088 FAX 612/854-0482
8030 Old Cedar Ave. So., Ste. #215
Bloomington, MN 55425

4.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz 1234567890

3.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890



Lehrbuch
der
Politischen Arithmetik

Von

Wilhelm Ludwig,
Professor an der Wiener Handels-Akademie,
Dozent an der Export-Akademie.

Mit einem Tabellenheft.

Vierte Auflage.



Wien und Leipzig 1920,
Buchdruckerei und Verlags-Buchhandlung Carl Fromme.
G. m. b. H.

Lehrbuch

der

Politischen Arithmetik

Von

Wilhelm Ludwig,
Professor an der Wiener Handels-Akademie,
Dozent an der Export-Akademie.

Mit einem Tabellenheft.

Vierte Auflage.



Wien und Leipzig 1920.
Buchdruckerei und Verlags-Buchhandlung Carl Fromme.
G. m. b. H.

Verlags-Archiv Nr. 1343.

Inhalt.

Einleitung.

Unter *politischer**) *Arithmetik* ist jener Teil der Mathematik zu verstehen, welcher sich vornehmlich mit den rechnerischen Problemen der staatlichen und sozialen Institutionen befaßt, soweit dieselben nicht in das Gebiet *der kaufmännischen Arithmetik* gehören. In dem Maße, als sich die letzteren entwickelten, gewann auch die erstere immer größere Bedeutung. Die Anfänge reichen zwar bis in das 16. Jahrhundert zurück, doch von einer eigentlichen politischen Arithmetik kann wohl erst vom 18. Jahrhundert an gesprochen werden. In jener Zeit wurden nämlich die ersten Grundsätze der Rechnung mit einfachen und Zinseszinsen in allgemeiner Form aufgestellt.

Die Wissenschaft erweiterte sich in der Folgezeit mit Rücksicht auf die Regelung der Staatshaushalte, die Erstarkung des Kredites und die Ausgestaltung des Vereins- und insbesondere auch des Versicherungswesens immer mehr und umfaßt heute im wesentlichen die verschiedenen Arten und Modalitäten der Verzinsung, die Berechnung von Zeitrenten, die diversen Formen der Kapitalsrückzahlung und der Tilgungspläne, die Bestimmung der Anlehenskurse, die Lotterieanlehen, die verschiedenen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die arithmetischen Probleme der Lebensversicherung.

Nachdem die Grundlage der politischen Arithmetik die *Zinsenrechnung* ist, soll zunächst eine kurze historische Darstellung der Entwicklung des Kapitalzinses gegeben werden.

Die Abneigung gegen das Zinsnehmen auf niedrigen Stufen wirtschaftlicher Kultur wird sowohl durch das Verbot des Zinsnehmens zwischen Juden untereinander in der mosaischen Gesetzgebung als durch das im alten Rom bestandene Zinsverbot dokumentiert. Nachdem sich jedoch mit der Entwicklung der Geschäftsverhältnisse ein Auskommen mit unentgeltlichem Kredit als unmöglich erwies, wurde bei den Römern das Zinsnehmen zuerst geduldet, nachher aber durch die Festsetzung eines Zinsmaximums mit 1% pro Monat förmlich sanktioniert. Das Christentum schlug aber mit seiner Lehre von der Nächstenliebe und der Barmherzigkeit und insbesondere mit dem

*) Treffender *finanzpolitischer.*

Hinweis auf eine im Evangelium Lukas' enthaltene Stelle („Gebet das Darlehen, ohne euch etwas davon zu erhoffen") auch in die römischen Zinstaxen Bresche, so daß Kaiser Justinian den Zinsfuß auf 6% jährlich herabsetzte. Fast während des ganzen Mittelalters war das auch von den weltlichen Gesetzgebungen übernommene kirchliche Zinsverbot nahezu unangefochten in Geltung. Hatte doch Papst *Clemens V.* auf dem Konzil zu *Vienne* (1311) weltliche Obrigkeiten mit der Exkommunikation bedroht, wenn sie zinsfreundliche Gesetze erlassen oder die erlassenen nicht binnen drei Monaten aufheben sollten!

Dessenungeachtet aber hatte das Zinsnehmen nie aufgehört und wurde in dem Maße, als sich das wirtschaftliche Leben ausgestaltete, immer dringender, bis allmählich energische Verfechter desselben auftraten, unter welchen besonders *Zwingli* zu nennen ist. Vielfach wurde das Zinsverbot auch dadurch umgangen, daß sich der Gläubiger — allerdings nur im Falle eines verschuldeten Versäumnisses des Schuldners — das „interesse" an der verspäteten Zahlung von letzterem vergüten lassen konnte. Es wurde dann bei der Übergabe des nominell zwar unverzinslichen Darlehens einfach vereinbart, daß der Nachweis des verschuldeten Versäumnisses dem Gläubiger erlassen und wie hoch das diesem während der ganzen Darlehensdauer zu vergütende „interesse" sein soll.

Am frühesten wurde das Zinsnehmen in England gestattet (1545), in Deutschland ungefähr 100 Jahre später, dagegen in Frankreich das Zinsverbot noch unter Ludwig XIV. erneuert und erst im Jahre 1789 auch dort formell aufgehoben.

Waren also auch gegen Ende des 18. Jahrhunderts endlich alle Schranken gefallen, welche sich der Berechtigung des Kapitalzinses entgegenstellten, so herrschte doch noch geraume Zeit große Unklarheit darüber, ob *einfache* oder *zusammengesetzte* Zinsen in Anrechnung zu bringen seien. In Nachahmung des in der römischen Gesetzgebung enthaltenen Verbotes des *Anatocismus* — danach durften rückständige Zinsen nicht wieder zinsbar gemacht werden und jeder Zins hörte auf, wenn die Rückstände die Kapitalshöhe erreicht hatten — wurde auch in die neueren Gesetzgebungen u. a. in das aus dem Jahre 1811 stammende bürgerliche Gesetzbuch ein gleiches Verbot aufgenommen; dasselbe blieb in Österreich bis zum Jahre 1866 in Kraft und erst durch das Gesetz vom 14. Juni 1868 wurde unter anderem ausdrücklich bestimmt, daß Zinsen von Zinsen gefordert werden dürfen.

I. Teil.

Zinsen- und Annuitäten-Rechnung.

A. Einfache Zinsenrechnung.

Wie bereits in der Einleitung bemerkt, kann man ein Kapital entweder auf *einfache* oder auf *zusammengesetzte Zinsen* — die letzteren werden in der Regel *Zinseszinsen* genannt — anlegen.

Der ziffermäßige Wert der einfachen Zinsen ergibt sich ans folgender Überlegung:

Wenn 100 Kronen Kapital in 1 Jahr p Kronen Zinsen liefern,
dann ergeben K „ „ „ 1 „ $\frac{K}{100}p$ „ „ und in j Jahren

$$Z_j = \frac{K.p.j.}{100} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Sollen die Zinsen bei gegebenem *Jahreszinsfuß* für Halb-, Vierteljahre, Monate oder Tage berechnet werden, so erhält man aus der Erwägung, daß

100 Kronen Kapital in 2 Semestern p Kronen Zinsen und
K „ „ „ s „ Z_s „ „ geben,

als Zinsenbetrag
$$Z_s = \frac{K.p.s}{200} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

In analoger Weise ergibt sich, da p auch den Zinsfuß für 4 Quartale oder 12 Monate oder 365 Tage vorstellt, als Zinsbetrag

für q Quartale . . . $Z_q = \frac{K.p.q}{400}$ . . . . . . 3)

„ m Monate . . . $Z_m = \frac{K.p.m}{1200}$ . . . . . . 4)

„ t Tage . . . . $Z_t = \frac{K.p.t}{36500}$.

An Stelle der letzten Formel benützt man gewöhnlich die Näherungsformel

$$Z_t = \frac{K.p.t}{36000}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

wobei das Jahr zu 360 Tagen gerechnet wird.

Ist der Zinsfuß für einen unterjährigen Termin, etwa $u\%$ pro Halbjahr gegeben und sollen für s Semester die Zinsen ermittelt werden, dann muß man dieselben natürlich in Analogie zu Formel 1) berechnen mit

$$Z = \frac{K.u.s}{100} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Wie groß sind die $3^1/_2\%$igen einfachen Zinsen von 1000 K für 1 Jahr 4 Monate 16 Tage?

Man kann den Zeitraum entweder in Jahren oder in Monaten oder in Tagen ausdrücken; das Resultat muß in allen drei Fällen dasselbe sein.

Rechnet man mit Jahren, dann hat man für j (Formel 1) zu setzen

$$j = 1 + \frac{4}{12} + \frac{16}{360} = 1{\cdot}3\dot{7}$$

und erhält für

$$Z_j = \frac{1000\,.\,3{\cdot}5\,.\,1{\cdot}3\dot{7}}{100} = 48{\cdot}22\ K.$$

Unrichtig wäre es, $j = 1 + \frac{4}{12} + \frac{16}{365}$ zu setzen.

Wird die Verzinsungsdauer in Monaten dargestellt, dann ist

$$m = 12 + 4 + \frac{16}{30} = 16{\cdot}5\dot{3}$$

und

$$Z_m = \frac{1000\,.\,3{\cdot}5\,.\,16{\cdot}5\dot{3}}{1200} = 48{\cdot}22\ K$$

und bei der Rechnung nach Tagen resultiert

$$Z_t = \frac{1000\,.\,3{\cdot}5\,.\,496}{36000} = 48{\cdot}22\ K.$$

Welche Zinsen entstehen aus 580 K in 1 Jahr und 5 Monaten bei einer 2%igen Verzinsung pro Semester?

1 Jahr 5 Monate $= 2^5/_6$ Semester, sohin $Z = \frac{580\,.\,2\,.\,2{\cdot}8\dot{3}}{100} = 32{\cdot}86\ K.$

B. Zinseszinsen-Rechnung.

Das Wesen der Zinseszinsen-Rechnung besteht darin, daß die in einer bestimmten *Zeiteinheit* (Jahr, Semester, Quartal) aufgelaufenen Zinsen eines Kapitales diesem *hinzugeschlagen und mit demselben* wieder verzinst werden.

Es ist auch bei der Anrechnung einfacher Zinsen denkbar, daß diese nicht jeweils bei ihrer Fälligkeit behoben, sondern auch zum Kapital hinzugeschlagen werden (z. B. 1000 K werden auf 9 Monate gegen eine monatliche Verzinsung von $\frac{1}{4}\%$ geliehen, die 2·50 K Zinsen aber nicht monatlich, sondern erst bei Rückzahlung der Schuld begehrt), doch wird in diesem Falle stets nur das Anfangskapital und nicht auch der aufgelaufene Zinsenbetrag mitverzinst.

Hinsichtlich des Zeitpunktes der Zinsenentrichtung normiert das in der Einleitung zitierte Gesetz vom Jahre 1868: „Über die Frist zur Zahlung der Zinsen entscheidet die Verabredung. Wird hierüber keine Verabredung getroffen, so sind die Zinsen bei *Zurückzahlung* des Kapitales oder, wenn der Vertrag auf mehrere Jahre geschlossen wurde, *jährlich* abzuführen. Zinsen dürfen *im vorhinein* ohne alle Beschränkung abgezogen oder gefordert werden."

Je nachdem nun die Zinsen am Schlusse oder am Anfang einer bestimmten Zeiteinheit entrichtet werden, spricht man von *postnumerando,* auch *dekursiver* oder *Nachhinein-Verzinsung* und von *pränumerando, antizipativer* oder *Vorhinein-Verzinsung.*

Erster Abschnitt.

Dekursive Verzinsung.

§ 1.

Endwert eines Kapitales.

Das Kapital K wird, zu $p\%$ pro anno angelegt, nach einem Jahre auf den Betrag

$$K_1 = K + \frac{K.p}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

anwachsen. Da die Zinsen nicht behoben, sondern beim Kapital belassen und mitverzinst werden, ist im 2. Jahre K_1 zu verzinsen und der Wert hievon am Schlusse dieses Jahres

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1.p}{100} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

oder

$$K_2 = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;$$

K_2 bleibt während des 3. Jahres angelegt und wächst bis zum Schlusse desselben an auf

$$K_3 = K_2 + \frac{K_2.p}{100} = K_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Allgemein kann demnach der Wert eines auf Zinseszinsen angelegten Kapitales am Ende des n^{ten} Jahres dargestellt werden durch die Formel

$$K_n = K_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

oder wenn man den vom Kapital 1 im Laufe eines Jahres erzielten Zins $\frac{p}{100}$ mit i bezeichnet, durch

$$K_n = K_{n-1}(1+i) = K(1+i)^n.$$

Der Faktor $1 + \frac{p}{100} = 1 + i$ wird der *dekursive Aufzinsungsfaktor* genannt und beträgt

für	$^1/_2\%$	. . . . 1·005
„	$^3/_4\%$	. . . . 1·0075
„	1%	. . . . 1·01
„	$2^1/_2\%$	. . . . 1·025
„	$3^1/_8\%$	. . . . 1·03125
„	$3^3/_8\%$	. . . . 1·03375 usf.

Setzt man $1 + i = r$, dann geht die Formel über in

$$K_n = K.r^n \quad . . . . \quad \text{I)}$$

d. h. *der Endwert eines Kapitales nach n Jahren wird gefunden, wenn man dasselbe mit der n^{ten} Potenz des Aufzinsungsfaktors multipliziert.*

Der Wert des Kapitales K am Anfange des n^{ten} Jahres wird, da bis dahin nur $n - 1$ Jahre vergangen sind, natürlich gleich dem Werte am Schlusse des $(n-1)^{ten}$ Jahres, d. i.

$$K_{n-1} = K.r^{n-1}$$

sein.

Die Formel I) gilt aber nicht nur für den Fall der jährlichen Verzinsung, sondern ganz allgemein für jede Zeiteinheit, allerdings immer unter der Voraussetzung, daß dann p den Zinsfuß der betreffenden Zeiteinheit vorstellt. In einem solchen Falle spricht man von *unterjähriger Verzinsung* (auch von terminlicher Kapitalisierung).

Praktisch wird sich der Vorgang der zusammengesetzten Verzinsung folgendermaßen abspielen, und zwar:

a) bei jährlicher Zinsenzuschreibung:

1000 K würden in einer Sparkasse hinterlegt und von dieser mit 3% (Postsparkasse) per annum verzinst.

Anfängliches Kapital	K	1 000·—
hiezu 3% Zinsen	„	30·—
sohin Guthaben am Schlusse des 1. Jahres . .	K	1 030·—
3% Zinsen hievon	„	30·90
daher Guthaben am Ende des 2. Jahres . . .	K	1 060·90
hiezu 3% Zinsen	„	31·83
sohin Guthaben am Schlusse des 3. Jahres . .	K	1 092·73 usf

b) bei unterjähriger Verzinsung:

5 000 Kronen wären mit 2% pro Semester zu verzinsen.

Anfängliches Kapital	K	5 000·—
hiezu 2% Zinsen	„	100·—
Guthaben am Schlusse des 1. Semesters . . .	K	5 100·—
hiezu 2% Zinsen für das 2. Halbjahr	„	102·—
daher Guthaben am Ende des 2. Semesters .	K	5 202·—
hiezu 2% Zinsen	„	104·04
sohin Guthaben am Schlusse des 3. Semesters .	K	5 306·04 usw.

Es sind demnach im Falle *a)* die 1 000 K in 3 Jahren auf 1092·73 K und im Falle *b)* die 5000 K in 3 Semestern auf 5 306·04 K angewachsen, so daß die aufgelaufenen Zinsen 92·73 K, beziehungsweise 306·04 K betragen.

Fragen wir nun, wie groß der Betrag der in denselben Zeiträumen entstandenen *einfachen* Zinsen wäre, so erhalten wir

$$\text{für } a)\ Z = \frac{1000 \,.\, 3 \,.\, 3}{100} = 90\cdot\!- K$$

$$\text{und } „\ b)\ Z = \frac{5000 \,.\, 2 \,.\, 3}{100} = 300\cdot\!- K$$

also kleinere Beträge. Es ist übrigens wohl selbstverständlich, daß — gleiche Kapitalien, Zinsfüße und Verzinsungsdauer vorausgesetzt — die Rechnung mit Zinseszinsen stets größere Zinsenbeträge liefert als die Rechnung mit einfachen Zinsen.

§ 2.

Tabelle I und deren Ergänzung.

Die im § 1 durch sukzessive Aufzinsung gewonnenen Resultate können mit Hilfe der Formel I) (S. 7) erheblich rascher erhalten werden; für *a)* ist

$$K_3 = K \,.\, r^3 = 1000 \,.\, 1{\cdot}03^3 = 1000 \,.\, 1{\cdot}09273 \quad = 1\,092{\cdot}73$$

und für *b)* ist

$$K_3 = K \,.\, r^3 = 5000 \,.\, 1{\cdot}02^3 = 5000 \,.\, 1{\cdot}061208 = 5\,306{\cdot}04.$$

Die Werte für r^3 sind unmittelbar aus den „Hilfs-Tabellen", und zwar aus *Tabelle I dekursiv* (S. 4—5) zu entnehmen. Dieselbe enthält für die Zinsfüße von $1^3/_4$, 2, 3, $3^1/_2$, $3^3/_4$, 4, $4^1/_4$ und $4^1/_2$% die Aufzinsungsfaktoren zu den Zinsterminen von 1 bis 50, demnach beispielsweise in der mit 4% überschriebenen Kolonne die Werte für 1·04, $1{\cdot}04^2$, $1{\cdot}04^3$ . . . . bis $1{\cdot}04^{50}$. Den Wert für $1{\cdot}03^3$ wird man bei Termin 3 unter 3% und den Wert für $1{\cdot}02^3$ beim selben Termin unter 2% verzeichnet finden.

Handelt es sich um eine Verzinsung durch mehr als 50 Termine, z. B. um den Endwert eines Kapitales nach 60 Semestern, so muß man die Tabelle entweder logarithmisch oder mit Hilfe der vorliegenden Werte derart ergänzen, daß man sich r^{60} in zwei Faktoren zerlegt denkt, deren Exponenten nicht größer als 50 sind, also z. B.

$$r^{60} = r^{40} \,.\, r^{20}.$$

Für $K = 1\,370$, $p = 2$ und $n = 60$ wäre sohin

$$K_{60} = 1370 \,.\, 1{\cdot}02^{60} = 1370 \,.\, 1{\cdot}02^{40} \,.\, 1{\cdot}02^{20}$$
$$= 1370 \,.\, 2{\cdot}20803966 \,.\, 1{\cdot}48594740 = 4495{\cdot}01.$$

§ 3.

Ermittlung des Zinsfußes und der Terminanzahl.

Aus Formel I) kann jede der darin vorkommenden vier Größen bestimmt werden, wenn die übrigen drei gegeben sind. So erhält man aus

$$\log K_n = \log K + n \log r$$

$$\log r = \frac{\log K_n - \log K}{n}.$$

Zu welchem Zinsfuß müssen 7 200 K angelegt werden, damit sie in 9 Jahren 2 828·25 K an Zinsen tragen?

$$K_9 = 7200 + 2828{\cdot}25 = 10028{\cdot}25 \quad \text{und}$$
$$\log 10028{\cdot}25 = 4{\cdot}0012251$$
$$\log 7200\cdot\!- = \underline{3{\cdot}8573325}$$
$$\log r = 0{\cdot}1438926 : 9 = 0{\cdot}0159881$$
$$r = 1{\cdot}0375.$$

Da $r = 1 + \frac{p}{100}$ und demnach $p = 100 \,.\, (r - 1)$, ergibt sich für

$$p = 100 \,.\, 0{\cdot}0375 = 3{\cdot}75 = 3^3/_4\%.$$

Dieses Resultat kann mit Hilfe der Tabelle I ebenfalls auf kürzere Weise erhalten werden. Für $K = 1$ ist nämlich nach Formel I) $K_n = r^n$, d. h. das Anfangskapital 1 repräsentiert nach n Jahren jenen Wert, welcher unter p% beim Termin n in der Tabelle I verzeichnet ist. Um demnach die letztere anwenden zu können, muß man zunächst den Quotienten $\frac{K_n}{K} = r^n$, d. i. den der Kapitalseinheit entsprechenden Endwert oder für das vorstehende Beispiel

$$\frac{10028{\cdot}25}{7200} = 1{\cdot}39281$$

ermitteln.

Da die Verzinsungsdauer 9 Jahre beträgt, ist nunmehr nachzusehen, unter welchem Zinsfuß beim Termin 9 der Wert 1·39281 vorkommt; man findet ihn tatsächlich unter $3^3/_4$% verzeichnet.

Bei welcher Verzinsung wachsen 500 K in 15 Jahren auf 858·14 K an?

Versuchen wir auch diese Aufgabe mit Hilfe der Tabelle I zu lösen, so ergibt sich für

$$r^{15} = \frac{858{\cdot}14}{500} = 1{\cdot}71628.$$

Sucht man nun in der Tabelle bei Termin 15 nach diesem Werte so findet man wohl

unter $3^1/_2\%$ 1·67534883
und „ $3^3/_4\%$ 1·73708704,
den Wert 1·71628 jedoch nicht.

Man kann daher an der Hand der Tabelle die Frage zunächst dahin beantworten, daß der Aufgabe eine zwischen $3^1/_2$ und $3^3/_4\%$, und zwar näher zu letzterem Zinsfuß liegende Verzinsung entspricht.

Unter der Annahme, daß die aufgelaufenen Zinseszinsen $(r^n - 1)$ proportional mit dem Zinsfuße zunehmen, würde sich folgendes Resultat ergeben:

1·67534883 entspricht einem Zinsfuß von 3·5 %,
1·73708704 „ „ „ „ 3·75 %,
0·06173821 „ „ „ „ 0·25 %,
0·02081*) „ „ „ „ $(3·75 - x)\%$.

Aus der Proportion

$$0·06174 : 0·25 = 0·02081 : (3·75 - x)$$

folgt für $x = 3·66\underline{6}$.

Ein Blick in die Tabelle lehrt jedoch, daß die dem höheren Zinsfuße entsprechenden Zinseszinsen nicht Vielfache von den bei einer niedrigeren Verzinsung auflaufenden Zinseszinsen sind, denn beispielsweise

$1·04^{15} - 1 = 0·8009\ldots$ und nicht etwa $(1·02^{15} - 1) . 2 = 0·6917\ldots$;
wohl aber ist $1·04 - 1 = (1·02 - 1) . 2$.

Daraus geht hervor, daß der durch Interpolation gefundene Zinsfuß mit dem genauen Resultat nur für $n = 1$ übereinstimmt, für jede größere Terminanzahl aber kleiner als der tatsächliche Zinsfuß ist und hinter diesem um so mehr zurück bleibt, je größer die Terminanzahl ist.

Das genaue Resultat erhält man mit Hilfe der Logarithmen. So ist für den früheren Fall

$$\log 858·14 = 2·9335581$$
$$\log 500·- = 2·6989700$$
$$\log r = 0·2345881 : 15 = 0·0156392; \text{ somit}$$
$$r = 1·0367 \text{ und } p = 3·6\underline{7} = 3^2/_3\%.$$

Wie erheblich der Unterschied zwischen dem mit Hilfe der Logarithmen erhaltenen tatsächlichen Zinsfuß und dem durch Interpolation gewonnenen Näherungswerte ist, kann deutlich an folgendem Beispiel gesehen werden.

Bei welchem Zinsfuß wachsen 1000 K in 50 Jahren auf 5584·93 K an? Hiebei gelte als Voraussetzung, daß lediglich die Werte $1·03^{50}$ und $1·04^{50}$ zur Verfügung stünden.

*) 1·73709 — 1·71628.

Durch Interpolation würde sich ergeben:

$1·03^{50} = 4·38391$ und entspricht einem Zinsfuß von 3%,
$1·04^{50} = 7·10668$ „ „ „ „ „ 4%,
$1·0x^{50} = 5·58493$ „ „ „ „ „ $x\%$.

$$2·72277 : 1 = 1·20102 : (x - 3);$$

somit wäre $x = 3·441$, wogegen der tatsächliche Zinsfuß $3·5\%$ beträgt.

Bei welchem Zinsfuß verdoppelt sich in n Terminen ein Kapital K?

Die Antwort auf diese Frage gibt die Gleichung

$$K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 2\,K.$$

Wäre z. B. $n = 20$, dann würde aus

$$20 \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \log 2$$

für $p = 3·527$ folgen.

Einen Näherungswert aber liefert schon ein Blick in die Tabelle. Man hat einfach in der Zeile betreffend den Termin 20 nach dem Werte 2 zu suchen; dieser findet sich zwar nicht, wohl aber besagt die Tabelle, daß in 20 Terminen die Kapitalseinheit bei $3^1/_2\%$ auf 1·99 K und bei $3^3/_4\%$ auf 2·09 K anwächst, demnach der gesuchte Zinsfuß zwischen 3·5 und 3·75, und zwar erheblich näher zu dem ersteren liegen muß, was auch durch das genaue Resultat bestätigt worden ist.

In ganz ähnlicher Weise wie r, beziehungsweise p läßt sich die Größe n berechnen. Es ist nämlich

$$n = \frac{\log K_n - \log K}{\log r}.$$

In welcher Zeit wachsen 10 000 K bei $3^1/_2\%$ Zinsen pro anno auf 19 897·89 K an?

$$\log 19897·89 = 4·2988072$$
$$\log 10000·- = 4·-$$
$$n = 0·2988072 : 0·01494 = 20 \text{ Jahre.}$$

Auch dieses Resultat kann auf einfachere Weise mit Hilfe der Tabelle I erhalten werden. Bildet man nämlich wieder den Quotienten

$$\frac{K_n}{K} = \frac{19897·89}{10000·-} = 1·989789$$

und sucht unter $3^1/_2\%$ nach diesem Wert, so findet man ihn beim Termin 20.

Wie lange müssen 2000 K zu 2% per Semester verzinst werden, damit sich ein Guthaben von 3500 K ergibt?

Der Quotient

$$\frac{K_n}{K} = \frac{3500}{2000} = 1\cdot75$$

ist unter 2% in der Tabelle nicht zu finden, sondern nur

1·7410 . . . bei Termin 28
und 1·7758 . . . „ „ 29.

Das zu suchende n wird demnach zwischen 28 und 29 Semestern liegen. Durch Interpolation erhielte man folgenden Näherungswert:

1·77584469	entspricht der Terminanzahl	29
1·74102421	„ „ „	28
0·03482048	„ „ „	1
0·02584469*)	„ „ „	$(29 - x)$.

$$0\cdot03482048 : 1 = 0\cdot02584469 : (29 - x)$$

und daraus ist $x = 28\cdot25\underline{78}$.

Unter der Voraussetzung, daß für die gesamte in Betracht kommende Zeit Zinseszinsen berechnet werden (siehe die späteren Ausführungen im § 6), ergibt sich das genaue Resultat aus

$$\log 3500 = 3\cdot5440680$$
$$\log 2000 = \underline{3\cdot3010300}$$

mit $n = 0\cdot2430380 : 0\cdot0086002 = 28\cdot25\underline{96}$ Semestern oder 14 Jahren, 1 Monat und 17 Tagen.

Auch hier bleibt also der durch Interpolation erhaltene hinter dem tatsächlichen Werte zurück.

Die Richtigkeit des Resultates kann man mit Hilfe der Gleichung I) überprüfen; es muß nämlich

$$2000 \cdot 1\cdot02^{28\cdot2596} = 3500.$$
$$28\cdot2596 \log 1\cdot02 = 0\cdot2430380$$
$$\log 2\,000 = \underline{3\cdot3010300}$$
$$3\cdot5440680$$ und hievon ist der Numerus tatsächlich 3 500.

5000 K werden durch eine gewisse Zeit zu 4% und nachher zu $4^1/_2$% verzinst und wachsen bis zum Schlusse des 13. Jahres auf 8651 K an. Wie lange dauerte die 4%ige und wie lange die $4^1/_2$%ige Verzinsung?

Für die Beantwortung dieser Frage kommen offenbar die folgenden zwei Gleichungen in Betracht

$$5000 \cdot 1\cdot04^x \cdot 1\cdot045^y = 8651 \quad \text{und} \quad x + y = 13.$$

*) 1·77584469 — 1·75.

Hieraus folgt

$$5000 \cdot 1\cdot04^x \cdot 1\cdot045^{13-x} = 8651,$$

somit

$$\log 5000 + x \log 1\cdot04 + (13 - x) \log 1\cdot045 = \log 8651$$
$$x (\log 1\cdot04 - \log 1\cdot045) = \log 8651 - \log 5000 - 13 \log 1\cdot045$$

und

$$x = 5, \; y = 8.$$

Ein 24-Jähriger hat für eine (Todesfall-)Versicherung von 1000 K eine einmalige Einlage von 358·90 K zu leisten. Wann müßte der Tod des Versicherten eintreten, damit aus der Versicherung der gleiche Vorteil resultiert, als wenn die Einlage bei einer Sparkasse hinterlegt und mit $3^1/_2$% verzinst worden wäre?

In diesem Falle ist $K = 358\cdot90$, $K_n = 1\,000$, $p = 3^1/_2$, sohin $\frac{K_n}{K} = \frac{1000}{358\cdot9} = 2\cdot787$, ein Wert, welcher dem in der Tabelle beim Termin 30 verzeichneten Wert von 2·80679 . . . am nächsten kommt. Wenn demnach der Versicherte 30 Jahre oder noch später nach Abschluß des Vertrages stirbt, ergibt sich gegenüber der Sparkasse ein Nachteil, bei früher eintretendem Tode jedoch ein Vorteil.

§ 4.

Vervielfältigung eines Kapitales.

Im Anschlusse an die vorstehenden Ausführungen entsteht die spezielle Frage: *In welcher Zeit verdoppelt, verdreifacht, . . . oder allgemein ver-m-facht sich ein gegebenes Kapital beim selben Zinsfuß?*

An der Hand der Tabelle I läßt sich die Frage für jeden einzelnen der darin enthaltenen Zinsfüße ohne weiteres beantworten; man braucht nur nach dem Termin suchen, bei welchem als Endwert des ursprünglichen Kapitales 1 der Betrag 2, 3 etc. verzeichnet ist. So findet man, daß sich ein Kapital

	bei $3^1/_2$%	in ungefähr	21 Jahren	verdoppelt,
	„ 4%	„ „	18 „	
und	„ $4^1/_2$%	„ „	16 „	
oder	„ $3^1/_2$%	„ „	32 „	verdreifacht.

Eine genaue und allgemeine Lösung der Aufgabe, jene Zeit x zu suchen, in welcher das Kapital K auf das m-fache des Anfangswertes angewachsen sein wird, gibt die Gleichung

$$K \cdot r^x = m \cdot K \quad \text{oder} \quad r^x = m,$$

beziehungsweise

$$x \cdot \log r = \log m,$$

woraus

$$x = \frac{\log m}{\log r}.$$

In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital bei einer 3%igen Jahresverzinsung?

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{\cdot}03} = \frac{0{\cdot}3010300}{0{\cdot}0128372} = 23{\cdot}46 \text{ Jahre.}$$

Ein, wenn auch nicht vollkommen genaues, für den praktischen Gebrauch aber immerhin ausreichendes Resultat erhält man auf folgende Art:

für die Verdopplung: dividiere man 70 durch den Zinsfuß,
„ „ Verdreifachung: „ „ 110 „ „ „
„ „ Vervierfachung: „ „ 140 „ „ „

Hienach würde sich also ein Kapital

bei 3% verdoppeln in $\frac{70}{3} = 23{\cdot}3$ Jahren
„ $3\frac{1}{2}$% verdreifachen „ $\frac{110}{3{\cdot}5} = 31{\cdot}43$ „
„ 4% vervierfachen „ $\frac{140}{4} = 35$ „

(nach der Tabelle I in 23·5, beziehungsweise in 32 und $35\frac{1}{2}$ Jahren).

Zu den genannten Werten gelangt man auf folgende Weise:

Wäre g der natürliche Logarithmus (Basis $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots = 2{\cdot}718281828\ldots$) einer Zahl Z, so besteht die Gleichung

$$e^g = Z \quad \text{oder} \quad g \log e = \log Z,$$

woraus

$$g = \frac{\log Z}{\log e} = \log Z \cdot \frac{1}{\log 2{\cdot}718\ldots} = 2{\cdot}3025851 \,.\, \log Z.$$

Man kann nun in die Gleichung $x = \frac{\log m}{\log r}$ anstatt der Briggschen die natürlichen Logarithmen einführen, denn $\frac{l\,m}{l\,r} = \frac{2{\cdot}3025851 \,.\, \log m}{2{\cdot}3025851 \,.\, \log r} = \frac{\log m}{\log r} = x$; es ergibt sich dann für $x = \frac{l\,m}{l\,r} = \frac{l\,m}{l\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$

für $p = 3$ wäre der Nenner: $l\,1{\cdot}03 = 2{\cdot}3025851 \,.\, \log 1{\cdot}03 = 0{\cdot}02956$
„ $p = 3\frac{1}{4}$ „ „ „ : $l\,1{\cdot}0325 = 2{\cdot}3025851 \,.\, \log 1{\cdot}0325 = 0{\cdot}03198$
„ $p = 3\frac{1}{2}$ „ „ „ : $l\,1{\cdot}035 = 2{\cdot}3025851 \,.\, \log 1{\cdot}035 = 0{\cdot}03440$
„ $p = 3\frac{3}{4}$ „ „ „ : $l\,1{\cdot}0375 = 2{\cdot}3025851 \,.\, \log 1{\cdot}0375 = 0{\cdot}03681$
„ $p = 4$ „ „ „ : $l\,1{\cdot}04 = 2{\cdot}3025851 \,.\, \log 1{\cdot}04 = 0{\cdot}03922$

Es ist ersichtlich, daß man keinen erheblichen Fehler begcht, wenn man die *log nat.* der vorstehenden Aufzinsungsfaktoren gleich setzt $\frac{p}{100}$, also beispielsweise $l\,1{\cdot}03 = 0{\cdot}03$ etc. Bei dieser Annahme erhält man dann für

$$x = \frac{l\,m}{\frac{p}{100}} = \frac{100 \,.\, l\,m}{p} = \frac{230{\cdot}25851 \,\log m}{p},$$

Werden nun für m die Werte 2, 3, 4 etc. eingesetzt, dann ergibt sich

für die Verdopplung: $\frac{230{\cdot}25851 \,.\, \log 2}{p} = \frac{70{\cdot}3}{p} = \frac{70}{p}$
„ „ Verdreifachung: $\frac{230{\cdot}25851 \,.\, \log 3}{p} = \frac{109{\cdot}9}{p} = \frac{110}{p}$
„ „ Vervierfachung: $\frac{230{\cdot}25851 \,.\, \log 4}{p} = \frac{138{\cdot}6}{p} = \frac{140}{p}$.

Untersuchen wir nun, in wieviel Jahren sich ein Kapital K bei *einfacher* Verzinsung ver-m-facht. Die Bedingungsgleichung hiefür ist

$$m \,.\, K = K + \frac{K \,.\, p \,.\, j}{100} = K \frac{100 + p\,j}{100}, \text{ so daß}$$

$$j = \frac{100}{p}(m - 1).$$

Für $m = 2$ und $p = 4$ ist $j = 25$ gegenüber 18 } bei der Anrechnung
„ $m = 3$ „ $p = 3\frac{1}{2}$ „ $j = 57$ „ 32 } von Zinseszinsen.

Es bestehen somit sehr bedeutende Unterschiede zwischen den Ergebnissen nach der einen und nach der andern Methode, die in nur wenig verringertem Maße auch dann noch vorhanden sind, wenn, wie dies bei Sparkassen zu geschehen pflegt, bei der jedesmaligen Zuschreibung der Zinsen diese nur von den Kronen, nicht aber auch von den Hellern des jeweiligen Guthabens berechnet werden.

§ 5.

Relativer und konformer Zinsfuß.

Im allgemeinen pflegt man, wenn die Verzinsung nicht ganz-, sondern halb-, viertel- oder allgemein m^{tel}-jährig erfolgt, den auf den betreffenden unterjährigen Zinstermin entfallenden Zinsfuß $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{4}$ oder $\frac{p}{m}$ gleichzusetzen, also nach dem sogenannten *relativen Zinsfuß* zu rechnen, d. h. man ändert einfach den Zinsfuß proportional der Zeit und sieht beispielsweise eine 2%ige Verzinsung pro Semester als identisch an mit einer 4%igen Jahresverzinsung. Daß diese Gleichheit aber nicht besteht, beweist folgendes Beispiel:

Es werden 10 000 K ein Jahr lang verzinst, und zwar

a) zu 2% pro Semester:

Anfangskapital	10 000 K
2% Zinsen	200 „
Guthaben am Schlusse des 1. Semesters	10 200 K
2% Zinsen	204 „
Guthaben zu Ende des Jahres	10 404 K $= 10\,000 . 1{\cdot}02^2$,

b) zu 4% pro Jahr:

Anfangskapital . . . . 10 000 K
4% Zinsen . . . . 400 „
Guthaben zu Ende des Jahres 10 400 $K = 10000 . 1{\cdot}04$.

Es zeigt sich somit, daß man im Falle einer 2%igen Semesterverzinsung in derselben Zeit ein größeres Endkapital erhält als bei ganzjähriger 4%iger Verzinsung.

Wären p% jährliche Zinsen identisch mit $\frac{p}{m}$% pro m^{tel}-Jahr, beziehungsweise für die Kapitalseinheit i identisch mit $\frac{i}{m}$%, dann müßte $1 + i$ gleich sein $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$. Es ist aber $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = 1 + \frac{mi}{m} + \binom{m}{2}\left(\frac{i}{m}\right)^2 + \ldots$ sohin $> 1 + i$.

Wenn es also nicht einerlei ist, ein Kapital entweder mit $\frac{p}{n}$% pro m^{tel} Jahr oder mit p% pro anno zu verzinsen, so fragt es sich nun:

a) welche Jahresverzinsung p muß angewendet werden, um den gleichen Endwert wie bei der unterjährigen Kapitalisierung zu erhalten und

b) welcher unterjährige (Semester-, Quartals-, Monats-) Zinsfuß q ist zugrunde zu legen, damit derselbe Endwert resultiert wie bei einer gegebenen Jahresverzinsung?

Die Frage nach diesem *äquivalenten oder konformen Zinsfuß* wird durch die Gleichung beantwortet:

$$K\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{q}{100}\right)^m \quad \ldots \ldots 1)$$

Zum besseren Verständnisse dieser Gleichung wird daran erinnert, daß, wenn ein Kapital K beispielsweise monatlich $\left(= \frac{1}{12} \text{jährig}\right)$ zu α% verzinst wird, der Endwert nach 7 Monaten mit

$$K_7 = K\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^7$$

und nach 12 Monaten (= 1 Jahr) mit

$$K_{12} = K\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^{12}$$

zu rechnen ist. In Gleichung 1) ist allgemein das Jahr in m Termine geteilt gedacht und der auf einen Termin entfallende Zinsfuß mit q bezeichnet.

Hinsichtlich der beiden Fragen ergibt sich nun folgendes:

ad *a)* In diesem Falle ist q gegeben und die Gleichung 1) nach p aufzulösen. Man erhält:

$$\frac{p}{100} = \left(1 + \frac{q}{100}\right)^m - 1$$

und

$$p = 100\left[\left(1 + \frac{q}{100}\right)^m - 1\right] \quad \ldots \ldots 2)$$

Für $q = 1^1/_2$ und $m = 2$ wird $p = 100\,(1{\cdot}015^2 - 1) = 3{\cdot}0225$, d. h. es ist gleichgiltig, ob ein Kapital mit $1^1/_2$% pro Semester oder mit $3{\cdot}0225$% pro Jahr verzinst wird.

In ganz analoger Weise sind die Werte der folgenden Tabelle berechnet:

Relativer Jahreszinsfuß	Konformer Jahreszinsfuß, wenn die Zinsen entrichtet werden			
	jährlich ($m=1$)	halbjährig ($m=2$)	vierteljährig ($m=4$)	monatlich ($m=12$)
3%	3·—	3·0225	3·0339	3·0416
$3^1/_2$%	3·5	3·5306	3·5462	3·5567
4%	4·—	4·0400	4·0604	4·0742
$4^1/_2$%	4·5	4·5506	4·5765	4·5940

Der Wert 3·0416 beispielsweise stellt den *konformen Jahreszinsfuß* zu einer monatlichen Verzinsung von $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$% dar. Von der Richtigkeit kann man sich überzeugen, wenn man etwa den Betrag 1000 einmal zu 3·0416% jährlich und das andere Mal zu $^1/_4$% monatlich verzinst: die Endwerte müssen übereinstimmen:

$$1000 \,.\, 1{\cdot}030416 = 1030{\cdot}42 \text{ und } 1000 \,.\, 1{\cdot}0025^{12} = 1000 \,.\, 1{\cdot}030416 = = 1030{\cdot}42.$$

Wenn eine Sparkasse die Einlagen mit $3^1/_2$% jährlich verzinst, die Zuschreibung der Zinsen jedoch halbjährig (mit 1·75%) vornimmt, so beträgt der Jahreszinsfuß nur nominell $3^1/_2$, tatsächlich jedoch 3·53%.

ad *b)* Ist p gegeben und q zu berechnen, dann erhält man aus Gleichung 1):

$$m \log\left(1 + \frac{q}{100}\right) = \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ oder } \log\left(1 + \frac{q}{100}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}{m}.$$

Für $p = 3$ und $m = 4$ folgt $\frac{\log 1{\cdot}03}{4} = 0{\cdot}0032093$,

sohin $1 + \frac{q}{100} = 1{\cdot}007417$,

„ $p = 4$ „ $m = 2$ „ $1 + \frac{q}{100} = 1{\cdot}019804$,

„ $p = 3^1/_2$ „ $m = 12$ „ $1 + \frac{q}{100} = 1{\cdot}002871$

und es ergibt sich folgende Tabelle:

Jahreszinsfuß	Konformer Zinsfuß pro		
	Semester	Quartal	Monat
3%	1·4889	0·7417	0·2466
$3^1/_2\%$	1·7350	0·8637	0·2871
4%	1·9804	0·9853	0·3274
$4^1/_2\%$	2·2252	1·1065	0·3675

§ 6.

Gebrochene Verzinsungsdauer.

Aus der auf S. 12 berechneten Aufgabe ($n = 28{\cdot}26$ Semester) geht hervor, daß die Formel I) nicht nur für ganze, sondern auch für gebrochene Zinstermine Geltung besitzt. Es ist dementsprechend der Endwert eines Kapitales K nach j ganzen und k m^{tel} Jahren bei $p\%$iger Verzisnung pro anno

$$K_{j+\frac{k}{m}} = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^{j+\frac{k}{m}} = K \, . \, r^{j+\frac{k}{m}}.$$

Entgegen dieser Methode der Zinsenermittlung werden in der Regel nur für die ganzen (j) Jahre Zinseszinsen, für die Bruchteile $\left(\frac{k}{m}\right)$ aber einfache Zinsen gerechnet, so daß als Endwert der Ausdruck resultiert:

$$K_j + \frac{K_j \, . \, p \, . \, \frac{k}{m}}{100} = K_j\left(1+\frac{pk}{100\,m}\right) = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^j\left(1+\frac{pk}{100\,m}\right) = K_{2)}.$$

Auf welchen Betrag wachsen $5000\,K$ zu $3^3/_4\%$ in 7 Jahren, 9 Monaten und 20 Tagen an?

Wird die Rechnung nach der ersten Methode durchgeführt, so erhält man, da $j = 7$ und $\frac{k}{m} = \frac{290}{360}$, für

$$K_{7\frac{29}{36}} = 5000 \, . \, 1{\cdot}0375^{7\frac{29}{36}} = 6664{\cdot}48.$$

Nach der zweiten Methode (gemischte Verzinsung) ergibt sich als Endwert:

$$5000 \, . \, 1{\cdot}0375^7\left(1+\frac{3{\cdot}75 \, . \, 290}{36000}\right) = 6665{\cdot}18 \text{ oder}$$

$$5000\left[1{\cdot}0375^7 + \frac{290}{360}\,(1{\cdot}0375^8 - 1{\cdot}0375^7)\right] = 6665{\cdot}18.$$

Es zeigt sich, daß die Rechnung mit gemischten Zinsen eine etwas größeren Endwert liefert, ihre Anwendung demnach im Interesse des Gläubigers gelegen ist. Daß das Ergebnis stets um einige

größer sein muß, ist aus der folgenden Gegenüberstellung ersichtlich. Der Endwert von jährlich mit 4% verzinsten $1000\,K$ beträgt

			bei einer einfachen Verzinsung von $\frac{4}{12}\%$ pro Monat K	bei Anwendung des konformen Monatszinsfußes K	Differenz zwischen beiden Methoden h	Monatliche Zunahme beim konformen Zinsfuß K
nach	1	Monat	1003·33	1003·27	6	3·27
„	2	Monaten	1006·67	1006·56	11	3·29
„	3	„	1010·—	1009·85	15	3·29
„	4	„	1013·33	1013·16	17	3·31
„	5	„	1016·67	1016·48	19	3·32
„	6	„	1020·—	1019·80	20	3·32
„	7	„	1023·33	1023·14	19	3·34
„	8	„	1026·67	1026·49	18	3·35
„	9	„	1030·—	1029·85	15	3·36
„	10	„	1033·33	1033·22	11	3·37
„	11	„	1036·67	1036·61	6	3·39
„	12	„	1040·—	1040·—	—	3·39

Die Berechnung der Größen j und $\frac{k}{m}$ bei gegebenem Endwert und Zinsfuß kann wohl nur nach der gemischten Verzinsung einige Schwierigkeiten bereiten.

Setzen wir in dem letzten Beispiel den Endwert als bekannt und die Verzinsungsdauer als unbekannt voraus, dann ist

$$\frac{K_{2)}}{K} = \frac{6665{\cdot}18}{5000} = 1{\cdot}333036.$$

Dieser Wert findet sich unter $3^3/_4\%$ in der Tabelle I nicht, wohl aber

bei Termin 7 1·2939 . . . und
„ „ 8 1·3424 . . . .

Da der Quotient $\frac{K_{2)}}{K}$ kleiner als der bei Termin 8 verzeichnete Wert ist, muß auch $K_{2)}$ durch eine nur durch 7 ganze Jahre währende Verzinsung entstanden sein. Nun wächst die Kapitalseinheit bei $3^3/_4\%$ in 7 Jahren auf 1·29394774 an; es fehlen demnach auf 1·333036 noch 0·039088, und dies sind die Zinsen für den zu suchenden Jahresbruchteil vom Kapital 1·29394774, also

$$0{\cdot}039088 = \frac{1{\cdot}29394774 \, . \, 3{\cdot}75 \, . \, \frac{k}{m}}{100}$$

und hieraus folgt für $\frac{k}{m} = 0{\cdot}8056$ Jahre oder 290 Tage = 9 Monate, 20 Tage.

Dasselbe Resultat erhielte man aus $6665{\cdot}18 = 5000\,[r^7 + x\,(r^8 - r^7)]$.

§ 7.

Abzinsung und Tabelle II.

Mit Hilfe der Formel I) kann auch — vorausgesetzt, daß die Werte K_n, p und n gegeben sind — K berechnet, also die Frage beantwortet werden, welches der gegenwärtige Wert — der *Barwert* oder *Jetztwert* — eines erst nach n Terminen fälligen Kapitales unter Zugrundelegung eines $p^0/_0$igen Zinsfußes pro Termin ist.

Es ergibt sich für

$$K = \frac{K_n}{r^n} = K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Der Faktor

$$\frac{1}{1+i} = v$$

heißt allgemein der *Abzinsungsfaktor* und ist der reziproke Wert des Aufzinsungsfaktors. Es läßt sich also der Jetztwert eines nach n Terminen fälligen Kapitales K_n darstellen als

$$K = K_n \,.\, v^n.$$

Wie leicht einzusehen, ist es vorteilhaft, auch die Werte der Abzinsungsfaktoren, getrennt nach den häufigst vorkommenden Zinsfüßen, für eine entsprechende Anzahl von Zinsterminen in einer Tabelle vereinigt zu haben. Die Ermittlung des Barwertes stellt sich dann als einfache Multiplikation des Endkapitales K_n mit dem in *Tabelle II* (S. 6—7 der Hilfs-Tabellen) enthaltenen bezüglichen Werte dar.

Welcher Betrag müßte heute für eine nach 15 Jahren fällige Schuld von 8500 K bei einer $3^1/_2{}^0/_0$igen Verzinsung gezahlt werden?

Für $\frac{1}{1{\cdot}035^{15}}$ gibt die Tabelle II den Wert 0·59689062, sohin ist

$$K = 8500 \,.\, 0{\cdot}59689062 = 5073{\cdot}57\, K.$$

Dasselbe Resultat erhielte man natürlich auch, wenn man K_n durch den in Tabelle I unter $3^1/_2{}^0/_0$ beim Termin 15 verzeichneten Wert dividieren würde; es wäre dann

$$K = 8500 : 1{\cdot}67534883 = 5073{\cdot}57.$$

Wie groß ist unter Zugrundelegung einer $3^3/_4{}^0/_0$igen Verzinsung der Jetztwert eines nach $4^3/_4$ Jahren fälligen Kapitales von 6000 K, wenn *a)* für die ganze Zeit Zinseszinsen, *b)* für die letzten $^3/_4$ Jahre einfache Zinsen in Anrechnung gelangen?

ad *a)* $K = \frac{6000}{1{\cdot}0375^{4{\cdot}75}}$; sohin $\log K = \log 6000 - 4{\cdot}75 \log 1{\cdot}0375$

und $K = 5\,037{\cdot}42.$

ad *b)* Aus der die gemischte Verzinsung betreffenden Gleichung auf S. 18 folgt für

$$K = \frac{K_{j+\frac{k}{m}}}{r^j\left(1+\frac{p\,k}{100\,m}\right)} = \frac{6000}{1{\cdot}0375^4\left(1+\frac{3{\cdot}75\,.\,3}{400}\right)} = 5036{\cdot}78 \text{ oder}$$

$$K = \frac{K_{j+\frac{k}{m}}}{r^j + \frac{k}{m}(r^{j+1} - r^j)} = \frac{6000}{1{\cdot}0375^4 + \frac{3}{4}(1{\cdot}0375^5 - 1{\cdot}0375^4)} = 5036{\cdot}78.$$

§ 8.

Mittlerer Zahlungstermin.

Wenn mehrere Kapitalien nach verschiedenen Zeiträumen fällig sind, man die sämtlichen Beträge aber auf einmal entrichten will, so nennt man jenen Zeitpunkt, in welchem dies geschehen kann, ohne daß weder Gläubiger noch Schuldner zu Schaden kommen, den *mittleren Zahlungstermin.*

Ist

K_1 nach j_1 Jahren fällig
K_2 „ j_2 „ „
K_3 „ j_3 „ „
. . . .
K_n „ j_n „ „

so muß offenbar der gegenwärtige Wert aller dieser Zahlungen gleich sein dem Jetztwert des nach x Jahren zu entrichtenden Gesamtbetrages, sohin unter Anrechnung von $p^0/_0$ Zinseszinsen:

$$\frac{K_1}{r^{j_1}} + \frac{K_2}{r^{j_2}} + \cdots\cdots + \frac{K_n}{r^{j_n}} = \frac{K_1 + K_2 + \cdots + K_n}{r^x} \quad \ldots . \; 1)$$

Die Gleichung mit r^x multipliziert, ergibt

$$K_1 \,.\, r^{x-j_1} + K_2 \,.\, r^{x-j_2} + \cdots + K_n \,.\, r^{x-j_n} = K_1 + K_2 + \cdots + K_n, \; . \; . \; 2)$$

was nichts anderes darstellt, als den auf den Schluß des Zeitraumes x diskontierten Wert der Einzel- wie der Gesamtleistungen.

Wird Gleichung 1) mit r^{j_n} multipliziert, so erhält man

$$K_1 \,.\, r^{j_n-j_1} + K_2\, r^{j_n-j_2} + \cdots + K_n = (K_1 + K_2 + \cdots + K_n)\, r^{j_n-x} \quad . \; . \; 3)$$

oder den auf den Moment der letzten Leistung diskontierten Wert aller Zahlungen. Es ist somit gleichgiltig, auf welchen Zeitpunkt die beiderseitige Eskomptierung bezogen wird.

Der Wert für x kann nunmehr aus irgendeiner der 3 Gleichungen bestimmt werden; aus 1) erhält man

$$x = \left[\log(K_1 + K_2 + \cdots + K_n) - \log\left(\frac{K_1}{r^{j_1}} + \frac{K_2}{r^{j_2}} + \cdots + \frac{K_n}{r^{j_n}}\right)\right] : \log r.$$

Für die Erbauung einer Wasserleitung hat eine Stadt zu zahlen: am 1. Jänner und 1. Juli 1921 je 10 000 K, am 1. Juli 1922: 30 000 K und am 1. Oktober 1923: 50 000 K. In welchem Zeitpunkte könnte die ganze Bausumme auf einmal entrichtet werden, wenn eine $3^3/_4$%ige Verzinsung p. a. in Rechnung gezogen und das Übereinkommen am 1. Juli 1920 abgeschlossen wird?

$$x = \left[\log 100\,000 - \log\left(\frac{10\,000}{1{\cdot}0375^{1/2}} + \frac{10\,000}{1{\cdot}0375} + \frac{30\,000}{1{\cdot}0375^2} + \frac{50\,000}{1{\cdot}0375^{3\frac{1}{4}}}\right)\right] : \log 1{\cdot}0375$$

$$= [\log 100\,000 - \log (9\,817{\cdot}62 + 9\,638{\cdot}55 + 27\,870{\cdot}52 + 44\,361{\cdot}80)] : \log 1{\cdot}0375$$

$$= \frac{5 - 4{\cdot}9623147}{0{\cdot}0159881} = 2{\cdot}357 \text{ Jahre} = 2 \text{ Jahre } 4 \text{ Monate } 8{\cdot}5 \text{ Tage}$$

Die Entrichtung der gesamten Bausumme könnte demnach am 9. (wird das Jahr zu 365 Tagen gerechnet, am 8.) November 1922 erfolgen.

§ 9.

Endwert wiederholt gemachter Einlagen.

a) Vorhinein-Einlagen.

Wenn jemand bei einer Sparkasse

zu Beginn eines Zinstermines	den Betrag	E_1,
„ „ des nächsten Termines	„ „	E_2,
„ „ „ dritten „	„ „	E_3 und
„ „ „ vierten „	„ „	E_4

hinterlegt, so wird bei p%iger Verzinsung pro Termin das Guthaben am Schlusse des 4. Termines betragen:

$$G = \{[(E_1 r + E_2) r + E_3] r + E_4\} r = E_1 . r^4 + E_2 r^3 + E_3 r^2 + E_4 r$$

d. i. die Summe der auf den Schluß des 4. Termines bezogenen Endwerte jeder einzelnen Einlage.

Es würden folgende Beträge erlegt:

am 1. Jänner	1920	. . . . . 200 K
„ 1. „	1921	. . . . . 100 „
„ 1. „	1922	. . . . . 250 „
„ 1. „	1923	. . . . . 400 „

Wie groß ist bei einer 3%igen Verzinsung das Guthaben

a) am 31. Dezember 1923?
b) „ 31. „ 1925?

$$G_{a)} = 200 . 1{\cdot}03^4 + 100 . 1{\cdot}03^3 + 250 . 1{\cdot}03^2 + 400 . 1{\cdot}03$$
$$= 225{\cdot}10 + 109{\cdot}27 + 265{\cdot}23 + 412{\cdot}— = 1011{\cdot}60 \; K.$$

Das Guthaben am 31. Dezember 1925 wird natürlich die Summe der für diesen Zeitpunkt berechneten Endwerte der einzelnen Einlagen, also den Wert darstellen

$$G_{b)} = 200 . 1{\cdot}03^6 + 100 . 1{\cdot}03^5 + 250 . 1{\cdot}03^4 + 400 . 1{\cdot}03^3 = 1073{\cdot}21 \; K.$$

Ist $G_{a)}$ bereits gerechnet, dann kann $G_{b)}$ auf kürzere Weise erhalten werden, denn es ist auch

$$G_{b)} = 1{\cdot}03^2 (200 . 1{\cdot}03^4 + 100 . 1{\cdot}03^3 + 250 . 1{\cdot}03^2 + 400 . 1{\cdot}03)$$
$$= 1{\cdot}03^2 . G_{a)} = 1{\cdot}0609 . 1011{\cdot}60 = 1073{\cdot}21 \; K.$$

Für den Fall, als sämtliche Einlagen gleich groß sind, also

$$E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_n = E, \text{ wird}$$
$$G = E . r^n + E . r^{n-1} + E . r^{n-2} + \ldots + E r^2 + E r$$
$$= E (r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{II)}$$

Der Klammerausdruck stellt die *Summe der Aufzinsungsfaktoren* (aus Tabelle I) dar und ist in *Tabelle III* (S. 8—9 der Hilfs-Tabellen) zu finden. Dieselbe ist derart konstruiert, daß beim Zinstermin m die Summe der in Tabelle I bei den Terminen 1 bis m angegebenen Werte verzeichnet ist. Es stellt also beispielsweise der unter $3^3/_4$% beim Termin 10 vorkommende Ausdruck 12·31288241 die Summe der in der Tabelle I unter $3^3/_4$% bei den ersten 10 Terminen verzeichneten Werte dar.

Unter Bezugnahme auf die Tabelle III kann die Gleichung II) auch geschrieben werden:

$$G = E . \mathrm{T\,III}_p^{(n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{II}\,a),$$

worin der Faktor $\mathrm{T\,III}_p^{(n}$ *) den in der Tabelle III beim Zinsfuß p und dem Termin n verzeichneten Wert bedeutet.

Jemand gibt am 30. Juni 1920 erstmalig und dann am gleichen Tage jeden folgenden Jahres 300 K in eine Sparkasse, welche die Einlagen mit 3% p. a. verzinst.

Wie groß ist sein Guthaben am 30. Juni 1926 unter der Voraussetzung, daß an diesem Tage keine Einlage mehr geleistet wird?

$$G = 300 . \mathrm{T\,III}_3^{(6} = 300 . 6{\cdot}66246218 = 1998{\cdot}74 \; K.$$

Aus Gleichung II a) läßt sich jede der darin vorkommenden 4 Größen bestimmen, sobald die 3 übrigen gegeben sind. So ist

$$E = \frac{G}{\mathrm{T\,III}_p^{(n}} \quad \text{und} \quad \mathrm{T\,III}_p^{(n} = \frac{G}{E}.$$

*) Zu lesen: Tabelle III, Zinsfuß p, Termin n.

Welche jährliche Einlage muß 20mal jeweils am Jahresanfang geleistet werden, um bei $3^1/_2{}^0/_0$iger Verzinsung zu Ende des 20. Jahres einen Betrag von 15 000 K zu ergeben?

$$E = \frac{G}{\text{T III}_{3 \cdot 5}^{(20}} = \frac{15\,000}{29{\cdot}26947068} = 512{\cdot}48\ K.$$

Wie oft müssen am Jahresanfang 200 K erlegt werden, damit bei einer $4^0/_0$igen Verzinsung am Schlusse des letzten Jahres ein Guthaben von 3125·37 K resultiert?

$$\text{T III}_4^{(n} = \frac{G}{E} = \frac{3125{\cdot}37}{200} = 15{\cdot}6268.$$

Diesen Wert findet man in Tabelle III unter $4^0/_0$ beim Termin 12 verzeichnet, sohin ist $n = 12$.

Zu welchem Zinsfuß übernimmt eine Sparkasse Einlagen, wenn durch 18malige, jeweils am Jahresanfang stattfindende Entrichtung von 300 K zu Ende des 18. Jahres ein Guthaben von 7801·41 K entsteht?

$$\text{T III}_p^{(18} = \frac{G}{E} = \frac{7801{\cdot}41}{300} = 26{\cdot}0047.$$

Dieser Wert ist in Tabelle III beim Termin 18 unter $3^3/_4{}^0/_0$ zu finden, sohin $p = 3^3/_4$.

Handelt es sich um einen in der Tabelle nicht vorkommenden Zinsfuß, dann muß die Lösung auf einem anderen Wege gesucht werden. Die Gleichung II) kann man unter Anwendung der für geometrische Progressionen geltenden Summenformel $S_n = a\,.\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$, worin a das erste Glied der Reihe, q den Quotienten aus einem folgenden durch das unmittelbar vorhergehende Glied und n die Anzahl aller Glieder bedeutet, auch schreiben:

$$G = E\,.\,r\,\frac{r^n - 1}{r - 1};$$

hieraus ist

$$E = \frac{G\,(r - 1)}{r\,(r^n - 1)},\ \text{demnnch}\ r^n = \frac{E\,.\,r + G\,.\,(r - 1)}{E\,.\,r}$$

und

$$n = \{log\,[E\,.\,r + G\,.\,(r - 1)] - log\,(E\,.\,r)\} : log\,r.$$

Eine Auflösung der Gleichung II) nach r ist mit Hilfe der Algebra nicht möglich, weshalb diese Größe, beziehungsweise der Zinsfuß, wie später gezeigt wird, nur mittels Versuches erhalten werden kann.

Jemand legt am Anfang von 5 aufeinander folgenden Jahren je 250 K und nachher 3mal je 200 K in eine Sparkasse, welche

$3^1/_8{}^0/_0$ Zinsen gewährt. Wie groß ist das Guthaben am Schlusse des 8. Jahres?

$$G = 250\,(r^8 + r^7 + r^6 + r^5 + r^4) + 200\,(r^3 + r^2 + r)$$
$$= 250\,\frac{r^4\,(r^5 - 1)}{r - 1} + 200\,\frac{r\,(r^3 - 1)}{r - 1} = 2143{\cdot}20\ K.$$

Welcher Betrag müßte jeweils am 1. Jänner und 1. Juli erlegt werden, damit sich bei einer Verzinsung von $1^5/_8{}^0/_0$ pro Halbjahr für den Schluß des 10. Semesters ein Guthaben von 5000 K ergibt?

$$E = \frac{5000\,.\,0{\cdot}01625}{1{\cdot}01625\,(1{\cdot}01625^{10} - 1)} = 457{\cdot}10\ K.$$

Jemand ist für den Fall seines Todes auf 15 000 K versichert und hat hiefür jährlich im vorhinein 340 K an Prämie zu zahlen. Wie oft könnte die Prämie entrichtet werden, damit unter Zugrundelegung einer $3^1/_3{}^0/_0$igen Verzinsung dem Versicherten aus diesem Vertrage die gleichen Vorteile erwachsen wie bei einer Sparkasse? Dies ist dann der Fall, wenn der Endwert aller Prämien höchstens gleich ist dem versicherten Kapital:

$$n = \{log\,[340\,.\,1{\cdot}03\dot{3} + 15\,000\,.\,0{\cdot}03\dot{3}] - log\,(340\,.\,1{\cdot}03\dot{3})\} : log\,1{\cdot}03\dot{3}$$
$$= \{log\,(351{\cdot}33 + 500) - log\,351{\cdot}33\} : log\,1{\cdot}03\dot{3} = 26{\cdot}993.$$

Wenn sonach der Versicherte innerhalb 26 Jahren stirbt, gewährt ihm die Versicherung mehr als die Sparkasse, entrichtet er aber die Prämie 27mal, so wird er bereits einen, allerdings sehr minimalen Nachteil gegenüber der Sparkasseverzinsung erleiden. Soll derselbe ziffermäßig bestimmt werden, dann ist

$$E = 340,\ n = 27\ \text{und}\ p = 3^1/_3,\ \text{sohin}$$

$$G = 340\,.\,\frac{1{\cdot}03\dot{3}\,(1{\cdot}03\dot{3}^{27} - 1)}{0{\cdot}03\dot{3}} = 15\,006{\cdot}56\ K,$$

so daß der Versicherte von der Assekuranz-Gesellschaft um 6·56 K weniger erhielte, als wenn er seine Prämien in einer Sparkasse zu $3^1/_3{}^0/_0$ Zinsen hinterlegt hätte.

Mit wieviel Prozent müßten 15 jährlich im vorhinein geleistete Einlagen von je 516·61 K verzinst werden, damit hieraus für das Ende des 15. Jahres ein Guthaben von 10 000 K resultiert?

Schlägt man den gleichen Vorgang wie bei Ermittlung der Verzinsungsdauer ein, so hat man zu bilden

$$\text{T III}_p^{(15} = \frac{10\,000}{516{\cdot}61} = 19{\cdot}357.$$

Diesen Wert findet man jedoch in der Tabelle beim Termin 15 nicht verzeichnet, wohl aber

19·156 . . . unter 3%
und 19·971 . . . „ $3^1/_2$%.

Im Wege der Interpolation (siehe S. 10) würde sich demnach ein Zinsfuß von 3·123% ergeben. Setzt man nun versuchsweise $p = 3{\cdot}123$, so erhält man für

$$r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1{\cdot}03123\,\frac{1{\cdot}03123^{15} - 1}{0{\cdot}03123} = 19{\cdot}354.$$

Da der Quotient 19·357 zwischen 19·354 und 19·971 liegt, wird auch der fragliche Zinsfuß zwischen 3·123 und 3·5 zu suchen sein, während jener von 3% nunmehr schon außer Betracht bleibt. Wird jetzt $p = 3{\cdot}125$ angenommen, so ist

$$r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1{\cdot}03125\,\frac{1{\cdot}03125^{15} - 1}{0{\cdot}03125} = 19{\cdot}357,$$

so daß also der Aufgabe ein Zinsfuß von $3^1/_8$% zugrunde liegt.

Eine 40jährige Person hat für ein nach 20 Jahren fälliges Kapital von 6000 K durch 20 Jahre, eventuell nur bis zum früheren Ableben eine Prämie von 262·76 K zu entrichten. Mit wieviel Prozent verzinsen sich die Einzahlungen *a)* in dem Falle, als der Versicherte das 60. Lebensjahr erreicht und *b)* wenn er am Schlusse des 15. Versicherungsjahres stirbt?

ad *a)* Der Endwert aller Prämien muß gleich sein dem versicherten Kapital, demnach

$$6000 = 262{\cdot}76 \,.\, \mathrm{T\,III}_p^{(20} \quad \text{und} \quad \mathrm{T\,III}_p^{(20} = \frac{6000}{262{\cdot}76} = 22{\cdot}835.$$

Dieser Wert ist noch kleiner als der in der Tabelle unter dem Termin 20 beim Zinsfuß $1^3/_4$ verzeichnete Wert (24·116 . . .); auf dem Wege der Näherung findet man eine Verzinsung von zirka $1^1/_4$%.

ad *b)* Nachdem das Kapital erst 20 Jahre nach Abschluß des Vertrages zur Auszahlung gelangt, ist der auf den Zeitpunkt der Beendigung der Prämienzahlung eskomptierte Wert der versicherten Summe dem Endwerte der Einzahlungen gleichzusetzen, sohin

$$\frac{6000}{r^5} = 262{\cdot}76 \,.\, \mathrm{T\,III}_p^{(15} \quad \text{oder} \quad 22{\cdot}835 = r^5 \,.\, \mathrm{T\,III}_p^{(15}.$$

Hier ist es nicht möglich, den Zinsfuß unmittelbar der Tabelle III zu entnehmen, denn es muß auch der Faktor r^5 in Berücksichtigung gezogen werden. Setzt man versuchsweise $p = 3^1/_2$, dann ist

$$1{\cdot}035^5 \,.\, \mathrm{T\,III}_{3^1/_2}^{(15} = 1{\cdot}18768631 \,.\, 19{\cdot}97102971 = 23{\cdot}719 \ldots$$

Dieser Wert ist größer als 22·835, sohin müssen wir, nachdem beide in Betracht kommenden Faktoren sich im selben Sinne wie

der Zinsfuß ändern, eine kleinere Verzinsung zugrunde legen. Für $p = 3$ erhält man

$$1{\cdot}03^5 \,.\, \mathrm{T\,III}_3^{(15} = 1{\cdot}15927407 \,.\, 19{\cdot}15688130 = 22{\cdot}208 \ldots$$

Die fragliche Verzinsung bewegt sich demnach zwischen 3 und $3^1/_2$%.

Ein Versicherter hat vertragsmäßig an jährlichen Prämien zu bezahlen: in den ersten 5 Jahren je 346·— K, im 6. Jahre 300·40 K und von da ab alljährlich um 9·12 K weniger als im vorangehenden Jahre (also im 7.: 291·28 usf.). Auf welches Guthaben hätte er mit Schluß des 26. Jahres Anspruch, wenn er sämtliche Zahlungen einer Sparkasse geleistet hätte, welche die Einlagen mit 3% verzinst?

$$G = 346\,(r^{26} + r^{25} + r^{24} + r^{23} + r^{22}) + 300{\cdot}4 \,.\, r^{21} + (300{\cdot}4 - 9{\cdot}12)\,r^{20} +$$
$$+ (300{\cdot}4 - 2 \,.\, 9{\cdot}12)\,r^{19} + (300{\cdot}4 - 3 \,.\, 9{\cdot}12)\,r^{18} + \ldots + (300{\cdot}4 - 20 \,.\, 9{\cdot}12)\,r$$
$$= 346\,(r^{22} + r^{23} + \ldots + r^{26}) + 300{\cdot}4\,(r^{21} + r^{20} + r^{19} + \ldots + r) -$$
$$- 9{\cdot}12\,(r^{20} + 2\,r^{19} + 3\,r^{18} + \ldots + 20\,r)$$
$$= 346\,[\mathrm{T\,III}_3^{(26} - \mathrm{T\,III}_3^{(21}] + 300{\cdot}4 \,.\, \mathrm{T\,III}_3^{(21} - 9{\cdot}12 \,.\, y, \text{ wobei}$$
$$y = r^{20} + 2\,r^{19} + 3\,r^{18} + \ldots + 20\,r \text{ und}$$
$$y\,r = r^{21} + 2\,r^{20} + 3\,r^{19} + \ldots + 20\,r^2. \text{ Demnach ist}$$
$$y\,r - y = r^{21} + r^{20} + r^{19} + \ldots + r^2 - 20\,r, \text{ beziehungsweise}$$
$$y\,(r - 1) = r^2\,\frac{r^{20} - 1}{r - 1} - 20\,r = \frac{r^{22} - r^2 - 20\,r^2 + 20\,r}{r - 1} \text{ und}$$
$$y = \frac{20\,r + r^{22} - 21\,r^2}{(r - 1)^2}.$$

Werden die angedeuteten Rechnungsoperationen ausgeführt, so erhält man schließlich $G = 9988{\cdot}99\ K$.

b) Nachhinein-Einlagen

Wenn die Einlagen nicht zu Beginn, sondern am Ende des Zinstermines geleistet werden, dann wird, da in diesem Falle jeder Betrag um einen Termin kürzer erliegt als wie bei Vorhineinentrichtung, der Endwert derselben am Schlusse des n^{ten} Termines sein:

$$G = E \,.\, r^{n-1} + E \,.\, r^{n-2} + \ldots + E\,r + E = E\,(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$
$$= E\,[1 + \mathrm{T\,III}_p^{(n-1}]; \text{ hieraus ist}$$
$$E = \frac{G}{1 + \mathrm{T\,III}_p^{(n-1}}.$$

Sind G, E und p gegeben, dann wird sich n aus der Gleichung $G = E \,.\, \frac{r^n - 1}{r - 1}$ als $n = \{log\,[E + G\,(r - 1)] - log\,E\} : log\,r$ ergeben.

Welche Einlage müßte ein Vater für seine 10jährige Tochter jeweils am Jahresschlusse leisten, um für sie bei erreichtem 20. Lebensjahre 5000 K beheben zu können, wenn die Sparkasse $3^1/_2$% Zinsen in Anrechnung bringt?

$$E = \frac{5000}{1 + \mathrm{T\,III}_{3\cdot5}^{(9}} = \frac{5000}{11\cdot73139316} = 426\cdot21\ K.$$

Wie oft müßten 430·13 K am Semesterschlusse erlegt werden, damit sich bei einer 3%igen Verzinsung für das Ende des letzten Semesters ein Guthaben von 8000 K ergibt?

$$n = \{log\,[430\cdot13 + 8000\,.\,0\cdot03] - log\,430\cdot13\} : log\,1\cdot03 = 15.$$

Das Resultat kann, da ein in der Tabelle III enthaltener Zinsfuß in Frage kommt, auch unmittelbar aus jener erhalten werden. Es ist nämlich $1 + \mathrm{T\,III}_p^{(n-1} = \frac{G}{E}$ oder für dieses Beispiel

$$\mathrm{T\,III}_3^{(n-1} = \frac{8000}{430\cdot13} - 1 = 17\cdot599.$$

Nachdem sich dieser Wert unter 3% beim Termin 14 vorfindet, ist $n - 1 = 14$ und $n = 15$.

Welche Zinsen tragen 5000 K bei einem Zinfuß von $4^1/_2$% in 8 Jahren?

Diese Frage läßt sich nicht nur an der Hand der Tabelle I mit

$$5000\,.\,1\cdot045^8 - 5000 = 2110\cdot50,$$

sondern auch mit Hilfe der Tabelle III beantworten. Es braucht nur erwogen werden, daß die $4^1/_2$%igen Zinsen von 5000 K, d. i. 225 K durch 8 Jahre jeweils am Schlusse fällig und wieder verzinst werden. Es ist dann

$$225\,(r^7 + r^6 + \ldots + r + 1)^{*)} = 225\,[1 + \mathrm{T\,III}_{4^1/_2}^{(7}] = 2110\cdot50.$$

Jemand legt 13mal nacheinander am Jahresschlusse 400 K in die Sparkasse. Zu welchem Zinsfuße müßte diese die Einlagen verzinsen, damit unmittelbar nach Entrichtung der letzten Einlage ein Betrag von 6703·31 K behoben werden könnte?

$$\mathrm{T\,III}_p^{(12} = \frac{6703\cdot31}{400} - 1 = 15\cdot75827.$$

Sucht man in der Tabelle III beim Termin 12 nach diesem Wert, so findet man, daß der fragliche Zinsfuß zwischen 4 und $4^1/_4$% liegt. Im Wege der Interpolation würde sich ein Zinsfuß von 4·124% ergeben. Wird aber auf Grund desselben der Endwert ermittelt, so erhält man nur 6702·92 K, woraus hervorgeht, daß der tatsächliche Zinsfuß noch etwas größer ist; er beträgt nämlich $4^1/_8$%.

*) $225\,\frac{r^8 - 1}{r - 1} = 5000\,.\,0\cdot045\,\frac{r^8 - 1}{r - 1} = 5000\,(r - 1)\,\frac{r^8 - 1}{r - 1} = 5000\,(r^8 - 1).$

Hiedurch ist auch algebraisch die Übereinstimmung der Resultate nach den Tabellen I und III erwiesen.

Es zeigt sich somit, daß auch bei der Zinsfußbestimmung nach Tabelle III durch Interpolation ein etwas kleinerer als der faktische Zinsfuß resultiert, und zwar wird, wie leicht zu erweisen ist, auch hier mit zunehmendem n die Differenz größer.

§ 10.

Ganzjährige Einlagen bei terminlicher Verzinsung und umgekehrt.

Der Betrag E wird n-mal am Anfange jedes Jahres erlegt und zu q% pro Semester verzinst; wie berechnet man den Endwert mit Schluß des letzten Jahres? Da n Jahre $2n$ Zinstermine umfassen, ergibt sich das schließliche Guthaben aus der Gleichung

$$G = E\,(r^{2n} + r^{2n-2} + r^{2n-4} + \ldots + r^2) = E\,r^2\,\frac{(r^2)^n - 1}{r^2 - 1}.$$

Auch hier bedeutet r den Aufzinsungsfaktor pro Zinstermin.

Würden die Einlagen nicht jeweils am Anfang, sondern am Ende des betreffenden Jahres geleistet, dann wäre

$$G' = E\,(r^{2n-2} + r^{2n-4} + \ldots + r^2 + 1) = E\,\frac{(r^2)^n - 1}{r^2 - 1}.$$

Würden von einem Einlagstermin zum anderen allgemein m Zinstermine verstreichen, dann wäre in den Formeln der Exponent 2 lediglich durch m zu ersetzen.

Der Betrag E wird n-mal am Anfang jedes Semesters erlegt und zum Jahreszinsfuß p verzinst. Wie ist der Endwert mit Schluß des n-ten Semesters zu berechnen?

$$G = E\left(r^{\frac{n}{2}} + r^{\frac{n-1}{2}} + r^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + r^{\frac{n-(n-1)}{2}}\right) = E\,r^{\frac{1}{2}}\,\frac{\left(r^{\frac{1}{2}}\right)^n - 1}{r^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

Bei Nachhineinentrichtung der Einlagen wäre

$$G' = E\left(r^{\frac{n-1}{2}} + r^{\frac{n-2}{2}} + r^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + r^{\frac{1}{2}} + 1\right) = E\,\frac{\left(r^{\frac{1}{2}}\right)^n - 1}{r^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

§ 11.

Kapitalsverminderungen.

Jemand legt am	1. Jänner	1920	700	K	in die Sparkasse,
„	1. „	1921	200	„	
und nimmt heraus „	1. „	1923	300	„	
und „	1. „	1926	400	„	

Wie groß ist das Guthaben am 1. Jänner 1928, wenn $3^1/_2$% Zinsen berechnet werden?

Das Guthaben unmittelbar nach der ersten Abhebung beträgt $700\,r^3 + 200\,r^2 - 300$; dasselbe ist nun durch 3 weitere Jahre zu verzinsen, dann der Betrag von 400 K in Abzug zu bringen und der

sonach verbleibende Rest schließlich durch 2 Jahre zu verzinsen, so daß

$$G = [(700\, r^3 + 200\, r^2 - 300)\, r^3 - 400]\, r^2$$
$$= 700\, r^8 + 200\, r^7 - 300\, r^5 - 400\, r^2 = 391{\cdot}43\ K.$$

Denselben Ausdruck hätte man aber erhalten, wenn man die 4 Beträge direkt auf den 1. Jänner 1928 diskontiert, die Abhebungen jedoch als negative Einlagen eingestellt hätte.

Ein Vater hinterläßt seinem 10jährigen Sohne ein Vermögen von 20 000 K, welches in einer gerichtlichen Depositenkasse hinterlegt und von dieser mit $3^3/_4$% p. a. verzinst wird. Wie groß wird das Erbe nach 14 Jahren noch sein, wenn für die Erziehung des Sohnes bis zu dessen vollendetem 18. Lebensjahre alljährlich postnumerando 1000 K und in den folgenden 6 Jahren 1800 K verwendet werden?

$$G = 20\,000\, r^{14} - 1000\, (r^{13} + r^{12} + r^{11} + \cdots + r^6) -$$
$$- 1800\, (r^5 + r^4 + \cdots + r + 1)$$
$$= 20\,000 \,.\, 1{\cdot}0375^{14} - 1000 \,.\, [\mathrm{T\,III}^{(13}_{3^3/_4} - \mathrm{T}^{(5}_{3^3/_4}]$$
$$- 1800\, (1 + \mathrm{T\,III}^{(5}_{3^3/_4}) = 10\,231{\cdot}52\ K.$$

Von einem in der Sparkasse zu 4% Zinsen angelegten Kapitale von 10 000 K werden jährlich am Schlusse 400 K abgehoben; wie groß ist das Guthaben nach 6 Jahren?

$$G = 10\,000 \,.\, 1{\cdot}04^6 - 400\, (r^5 + r^4 + \cdots + 1)$$
$$= 10\,000 \,.\, 1{\cdot}04^6 - 400\, (1 + \mathrm{T\,III}^{(5}_4)$$
$$= 12\,653{\cdot}19 - 2653{\cdot}19 = 10\,000\ K,$$

d. h. sind die Abhebungen gleich den Zinsen, dann bleibt — wie selbstverständlich — die Einlage unverändert.

Welchen Betrag darf (im obigen Beispiele) der Sohn für seine Studien jährlich (postnum.) aufwenden, damit das Erbe nach 14 Jahren noch den vierten Teil seines ursprünglichen Betrages ausmacht?

$$5000 = 20\,000\, r^{14} - x\, (r^{13} + r^{12} + \cdots + 1)$$
$$x = \frac{20\,000\, r^{14} - 5000}{1 + \mathrm{T\,III}^{(13}_{3^3/_4}} = 1584{\cdot}22\ K.$$

Welchen Betrag dürfte ein 60jähriger Mann von seinem gegen $3^1/_2$% Zinsen angelegten Vermögen pro 30 000 K alljährlich (im nachhinein) abheben, damit dasselbe nach 25 Jahren gänzlich aufgebraucht ist?

$$x = \frac{K \,.\, r^{25}}{1 + \mathrm{T\,III}^{(24}_{3^1/_2}} = \frac{30\,000 \,.\, 2{\cdot}36324498}{38{\cdot}94985669} = 1820{\cdot}22\ K.$$

Meritorisch der ganz gleiche Fall liegt vor, wenn es sich darum handelt, ein Darlehen durch gleich große, jährlich im nachhinein zu entrichtende Raten — *Annuitäten* genannt — zu tilgen.

Durch welche jährliche Nachhinein-Annuität a wird ein Darlehen von 100 000 K in 25 Jahren bei 4%iger Verzinsung getilgt?

$$a = \frac{K \,.\, r^{25}}{1 + \mathrm{T\,III}^{(24}_4} = \frac{266\,583{\cdot}633}{41{\cdot}64590829} = 6401{\cdot}20\ K.$$

Wie viele Annuitäten à 1439·24 K müssen jeweils am Jahresschlusse entrichtet werden, um eine Schuld von 20 000 K bei $3^3/_4$% Zinsen zu tilgen?

Zur Lösung dieser Aufgabe wollen wir für das Symbol $1 + \mathrm{T\,III}^{(n-1}_p$ seinen Wert einsetzen, d. i.

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{r^n - 1}{i};$$

man erhält dann für

$$a = \frac{K\, r^x\, i}{r^x - 1} \text{ und hieraus}$$

$$a\, r^x - a = K\, i\, r^x \quad \text{oder} \quad r^x (a - K \,.\, i) = a, \quad \text{so daß}$$

$$x = \frac{\log a - \log (a - K \,.\, i)}{\log r}.$$

Für das vorstehende Beispiel resultiert sohin:

$$x = \frac{\log 1439{\cdot}54 - \log (1439{\cdot}24 - 750)}{\log 1{\cdot}0375} = 20.$$

§ 12.

Zeitrenten.

Renten sind periodisch wiederkehrende Zahlungen, welche jemand empfängt oder leistet. Je nachdem die einzelnen Zahlungen *(Raten)* untereinander gleich groß sind oder aber nach einem bestimmten Gesetze zu- oder abnehmen, spricht man von *konstanten* und von *steigenden*, beziehungsweise *fallenden* Renten. Anderseits unterscheidet man hinsichtlich der Art der Zahlung *unmittelbare* oder *sofort beginnende* und *aufgeschobene* Renten, je nachdem der Zeitraum, welcher bis zum Bezuge der ersten Zahlung zu verstreichen hat, kleiner (eventuell gleich groß) oder größer ist, als das zwischen zwei Raten festgesetzte Zeitintervall. Erfolgt die Auszahlung der Raten am Anfang eines Termines, dann nennt man die Rente eine *vorschüssige* oder *pränumerando* zahlbare, zum Unterschiede von *nachschüssigen* oder *postnumerando* zahlbaren Renten, welche jeweils am Schlusse eines Termines fällig werden. Schließlich liegt ein unterscheidendes Moment auch darin, ob *die Person* des Rentners

in Berücksichtigung gezogen wird oder nicht. Wenn nämlich die Zahlung einer Rente von dem Leben einer bestimmten Person abhängig ist, spricht man von einer sogenannten *Leibrente*, im anderen Falle von einer *Zeitrente*. An dieser Stelle sollen nur die letzteren behandelt werden.

Nach den vorstehenden Ausführungen können auch die in den §§ 9 bis 11 erörterten Aufgaben als Rentenbeispiele bezeichnet werden; zum Unterschiede von diesen soll im folgenden vornehmlich die Bestimmung des gegenwärtigen Wertes der Rentenzahlungen — *Barwert, Anfangswert* oder *Mise* genannt — erläutert werden.

Die Mise einer sofort beginnenden und n-mal postnumerando zahlbaren Rente im Betrage 1 ist durch die Gleichung dargestellt

$$|_n a = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \dots + \frac{1}{r^n} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n \quad \text{III.)}$$

Die Werte dieser aus der Summe der in Tabelle II enthaltenen Abzinsungsfaktoren bestehenden Reihe sind in Tabelle IV (S. 10—11 der Hilfs-Tabellen) verzeichnet.

Es bedeutet somit beispielsweise der unter 3% beim Termin 23 angegebene Wert (16·44360839) den Betrag, welcher bei einer 3%igen jährlichen Verzinsung nötig ist, um durch 23 Jahre eine Postnumerando-Rente im Betrage 1 beziehen zu können.

Soll die Rente „1" n-mal am Anfang des Termines gezahlt werden, dann ist ihr Barwert

$$|_n \mathfrak{a} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} \quad \text{III } a)$$

Unter Verwendung ähnlicher Symbole wie bisher können die Gleichungen III und III a in der Form geschrieben werden

$$|_n a = \mathrm{T\,IV}_p^{|n}, \text{ beziehungsweise } |_n \mathfrak{a} = 1 + \mathrm{T\,IV}_p^{|n-1}.$$

Wie groß ist bei 4%iger Verzinsung der Barwert einer durch 12 Jahre zu entrichtenden Rente von 1000 K, wenn die Zahlung

im nachhinein im vorhinein erfolgt?

$$x = 1000 . \mathrm{T\,IV}_4^{|12} = 9385{\cdot}07\ K; \qquad y = 1000 . [1 + \mathrm{T\,IV}_4^{|11}] = 9760{\cdot}48\ K.$$

Es zeigt sich, daß *der Barwert der vorschüssigen Rente größer ist als jener der nachschüssigen*, und zwar um die einjährigen Zinsen des letzteren, denn

$$|_n a = \frac{1}{r^n} \frac{r^n - 1}{r - 1} \text{ und } |_n \mathfrak{a} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

somit $$|_n \mathfrak{a} = |_n a . r = |_n a + \frac{p}{100} . |_n a.$$

Im letztbesprochenen Falle beträgt die Differenz zwischen beiden Barwerten 375·41 K, und das sind die 4%igen Zinsen von 9385·07 K.

Ist die Anzahl der Raten größer als 50, der zugrunde liegende Zinsfuß aber in der Tabelle enthalten, dann können die notwendigen Werte mit Leichtigkeit ergänzt werden. So ist z. B.

$$|_{90} a = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{50}} + \frac{1}{r^{51}} + \dots + \frac{1}{r^{90}} = \mathrm{T\,IV}_p^{|50} + v^{50} . \mathrm{T\,IV}_p^{|40}.$$

Eine Kontrolle hinsichtlich der Richtigkeit der in Tabelle IV verzeichneten Werte besteht darin, daß man untersucht, ob die bezüglichen Barwerte tatsächlich zur Gewährung der entsprechenden Rente hinreichen.

Die Mise einer 5mal jährlich im nachhinein zahlbaren Rente von 100 K beträgt bei 3%		457·97 K.
Dieser Betrag ist mit 3% zu verzinsen und vermehrt sich demnach im 1. Jahre um		13·74 „
auf		471·71 K.
Hievon ist die 1. Rentenzahlung zu leisten per		100·— „
sohin verbleiben zu Beginn des 2. Jahres		371·71 K
hiezu 3% Zinsen	11·15	
und ab die 2. Rate per	100·—	— 88·85 „
		282·86 K
hiezu 3% Zinsen für das 3. Jahr	8·49	
ab die 3. Rate per	100·—	— 91·51 „
		191·35 K
hiezu 3% Zinsen für das 4. Jahr	5·74	
ab die 4. Rate per	100·—	— 94·26 „
		97·09 K
hiezu 3% Zinsen für das 5. Jahr		2·91 „
		100·— K,

so daß am Schlusse des 5. Jahres tatsächlich nur mehr genau der Betrag für die 5. Rate von 100 K zur Verfügung steht.

Welches Kapital ist bei 3¾%iger ganzjähriger Verzinsung erforderlich, um durch 20 Semester eine postnumerando zahlbare Rente von 750 K leisten zu können?

Wird die Rechnung genau, also mittels des *konformen* Zinsfußes durchgeführt, dann ist

$$x = \frac{750}{1{\cdot}0375^{\frac{1}{2}}} + \frac{750}{1{\cdot}0375^{\frac{2}{2}}} + \frac{750}{1{\cdot}0375^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{750}{1{\cdot}0375^{\frac{20}{2}}}$$

$$= 750 \frac{1{\cdot}0375^{10} - 1}{1{\cdot}0375^{10}\,(1{\cdot}0375^{\frac{1}{2}} - 1)} = \frac{750 . 0{\cdot}44504394}{1{\cdot}44504394 . 0{\cdot}01858} = 12\,418{\cdot}53\ K$$

Falls man jedoch mit dem *relativen* Zinsfuß ($3^3/_4$% p. a. gleich $1^7/_8$% pro Semester) rechnet, resultiert für

$$x = \frac{750}{1\cdot01875} + \frac{750}{1\cdot01875^2} + \frac{750}{1\cdot01875^3} + \cdots + \frac{750}{1\cdot01875^{20}}$$

$$= 750\,\frac{1\cdot01875^{20} - 1}{1\cdot01875^{20} \,.\, 0\cdot01875} = 12\,412\cdot80\ K.$$

Wie groß ist unter Zugrundelegung einer $4^1/_4$%igen Kapitalisierung der Schätzwert eines noch 10 Jahre Steuerfreiheit (richtiger „Steuerermäßigung") genießenden Hauses, dessen jährlicher Bruttozins 19 120 K ausmacht, wenn für die Erhaltung 10% und an Steuern während der Steuerfreiheit 22·6 und nach Ablauf derselben 37% des Bruttozinses in Abzug zu bringen sind?

Werden von dem Bruttozins per . . . . 19 120·— K
47% für Erhaltung und Steuern, das sind . . . . . 8 986·40 „
abgezogen, so verbleibt ein Reinertrag von . . . . . 10 133·60 K,
welcher, zu $4^1/_4$% kapitalisiert, einen Ertrꞔgniswert von

$$\frac{10\,133\cdot6 \,.\, 100}{4\cdot25} = 238\,438\cdot\text{—}\ \text{„}$$

ergibt. Hiezu Wert der Steuerfreiheit, d. i. der Barwert einer 10jährigen nachschüssigen Rente von

$$\left(19\,120 \,.\, \frac{37 - 22\cdot6}{100}\right) . \,\mathrm{T\,IV}^{(10}_{4^1/_4} = 22\,056\cdot\text{—}\ \text{„}$$

Sohin gegenwärtiger Schätzwert . . . . 260 494·— K.

Rechnet man mit Rücksicht auf die halbjährige Steuerentrichtung mit 20 Semestern und einem Zinsfuß von $2^1/_8$%, so ergibt sich der Wert der Steuerfreiheit mit 22 241 K.

Ist der Barwert B einer Rente R gegeben und die letztere zu bestimmen, dann erhält man für die nachschüssige Zahlung, da

$$B = R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right),$$

$$\text{für } R = \frac{B}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{r}{r^n}} = B\,\frac{r^n i}{r^n - 1} = \frac{B}{\mathrm{T\,IV}^{(n}_{p}}$$

und für die vorschüssige Zahlung

$$R = \frac{B}{1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}} = B\,\frac{r^{n-1} i}{r^n - 1} = \frac{B}{1 + \mathrm{T\,IV}^{(n-1}_{p}}.$$

Soll die Anzahl der Raten (n) bestimmt werden, dann ergibt sich, da für die nachschüssige Rente

$$B = \frac{R}{r^n}\,\frac{r^n - 1}{i} = \frac{R}{i}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right),$$

$$n = [\log R - \log (R - B \,.\, i)] : \log r$$

und für die vorschüssige Rente

$$B = \frac{R}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{i} = \frac{R\,r}{i}\,\frac{r^n - 1}{r^n} = \frac{R\,r}{i}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right),$$

demnach

$$n = \left[\log R - \log\left(R - B\,\frac{i}{r}\right)\right] : \log r.$$

Wie lange kann jemand gegen eine einmalige Einlage von 8292·54 K, welche mit $3^1/_2$% verzinst wird, eine jährlich im nachhinein zahlbare Rente von 720 K beziehen?

$$n = [\log 720 - \log (720 - 8292\cdot54 \,.\, 0\cdot035)] : \log 1\cdot035 = 15.$$

Das Resultat kann aber auch mit Hilfe der Tabelle IV, und zwar wesentlich rascher gefunden werden. Da

$$B = R \,.\, \mathrm{T\,IV}^{(n}_{p}, \text{ ist } \mathrm{T\,IV}^{(n}_{3^1/_2} = \frac{B}{R} = \frac{8292\cdot54}{720} = 11\cdot5174$$

und dieser Wert findet sich in Tabelle IV unter $3^1/_2$% beim Termin 15.

Ewige Renten.

Wenn die Zahl der Raten unbegrenzt, also $n = \infty$ ist, spricht man von einer *ewigen Rente.* Die im Betrage 1 nachschüssig zahlbare ewige Rente wird demnach durch die Reihe dargestellt sein

$${}_\infty a = v + v^2 + v^3 + \cdots \text{ in infinitum} = v\,\frac{v^\infty - 1}{v - 1} = v\,\frac{1 - v^\infty}{1 - v}$$

$$= \frac{v}{1 - v} = \frac{1}{r - 1} = \frac{1}{i} = \frac{100}{p}.$$

Es beträgt demnach die nachschüssige ewige Rente

für $p = 3$ . . . . 1 : 0·03 $= 33^1/_3$
„ $p = 3^1/_2$ . . . . 1 : 0·035 $= 28^4/_7$
„ $p = 4$ . . . . 1 : 0·04 $= 25$

d. h. man muß 25 K zu 4% anlegen, um für ewige Zeiten jeweils am Jahresschlusse 1 K Rente beziehen zu können. Die ewige Rente ist also nichts anderes als der Zinsenbetrag der kapitalisierten Rate.

Der Barwert der vorschüssigen ewigen Rente ist ausgedrückt durch

$${}_\infty \mathrm{a} = 1 + v + v^2 + \cdots \text{ in infinitum} = 1 + {}_\infty a,$$

so daß beispielsweise für $p = 4$ ${}_\infty\mathrm{a} = 26$.

In diesem Falle wird die erste Rate sofort fällig, sohin verbleiben 25 K und diese geben alljährlich wieder 1 K Zinsen.

Aufgeschobene Renten.

Soll die erste Rentenzahlung (im Betrage 1) erst nach k Terminen erfolgen, dann ist die Mise für diese aufgeschobene und $n$mal zahlbare Rente

$$
\begin{aligned}
{}_{k|n}a\,^{*)} &= v^k + v^{k+1} + v^{k+2} + \dots + v^{k+n-1} \quad \dots\dots \quad 1)\\
&= [(1 + v + v^2 + \dots + v^{k-1}) + v^k + v^{k+1} + \dots\\
&\quad + v^{k+n-1}] - (1 + v + v^2 + \dots + v^{k-1})\\
&= {}_{|k+n}a - {}_{|k}a \quad \dots\dots\dots\dots \quad 2)
\end{aligned}
$$

d. h. der Barwert der durch k Jahre aufgeschobenen, $n$mal zahlbaren Rente ist gleich der Differenz zwischen den Barwerten einer $k+n$mal und einer nur $k$mal zu entrichtenden Rente.

Führen wir nun unsere gewöhnlichen Symbole ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
{}_{k|n}a &= \left[1 + \mathrm{T\,IV}_p^{(k+n-1}\right] - \left[1 + \mathrm{T\,IV}_p^{(k-1}\right]\\
&= \mathrm{T\,IV}_p^{(k+n-1} - \mathrm{T\,IV}_p^{(k-1}.
\end{aligned}
$$

Die Rente läßt sich aber auch nach Gleichung 1) folgendermaßen darstellen:

$$
{}_{k|n}a = v^k(1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1}) = v^k \,.\, {}_{|n}a = v^k\left[1 + \mathrm{T\,IV}_p^{(n-1}\right],
$$

so daß sich die aufgeschobene von der sofort beginnenden Rente nur durch den Abzinsungsfaktor unterscheidet.

Wie groß ist der Barwert einer um 5 Jahre aufgeschobenen und durch 10 Jahre zahlbaren Rente von jährlich 1000 K bei $3^1/_2$%iger Verzinsung?

Wird die Aufgabe nach beiden Methoden gelöst, so ergibt sich

$$
x = \frac{R}{1{\cdot}035^5}\left[1 + \mathrm{T\,IV}_{3^1/_2}^{(9}\right] = 1000 \,.\, 0{\cdot}8419732 \,.\, 8{\cdot}6076865 = 7247{\cdot}44\ K
$$

oder

$$
x = R\left[\mathrm{T\,IV}_{3^1/_2}^{(14} - \mathrm{T\,IV}_{3^1/_2}^{(4}\right] = 1000 \,.\, (10{\cdot}9205203 - 3{\cdot}6730792) = 7247{\cdot}44\ K.
$$

Jemand leistet eine Einlage von 10 000 K und will dafür eine nach 10 Jahren beginnende und durch 15 Jahre zahlbare Rente beziehen; wie groß ist dieselbe, wenn $3^3/_4$% Zinsen in Anrechnung kommen? Da

$$
B = R\left[\mathrm{T\,IV}_p^{(k+n-1} - \mathrm{T\,IV}_p^{(k-1}\right],
$$

folgt für

$$
R = 10\,000 : \left[\mathrm{T\,IV}_{3^3/_4}^{(24} - \mathrm{T\,IV}_{3^3/_4}^{(9}\right] = 1230{\cdot}91\ K.
$$

Würde in dieser Aufgabe die Höhe der Rente als bekannt, aber die Aufschubszeit als unbekannt vorausgesetzt, dann wäre

*) Bei aufgeschobenen, ganzjährig zahlbaren Renten ist es einfacher, nur von *vorschüssigen* Renten zu sprechen; so wird man z. B. eine um 5 Jahre aufgeschobene und dann jährlich postnumerando zahlbare Rente wohl kürzer als eine um 6 Jahre aufgeschobene (Vorhinein-)Rente bezeichnen.

$$
10\,000 \,.\, 1{\cdot}0375^k = 1230{\cdot}91\left[1 + \mathrm{T\,IV}_{3^3/_4}^{(14}\right]
$$

und

$$
1{\cdot}0375^k = 0{\cdot}123091 \,.\, 11{\cdot}7396198 = 1{\cdot}44504.
$$

Dieser Wert findet sich in Tabelle I unter $3^3/_4$% beim Termin 10, sohin ist $k = 10$.

Rentenumwandlung.

Eine sofort beginnende, durch 12 Jahre zahlbare Rente von 300 K soll in eine nach 4 Jahren beginnende und dann durch 8 Jahre zahlbare Rente umgewandelt werden. Wie groß ist die letztere, wenn 3% Zinsen gerechnet werden?

Die Barwerte beider Renten müssen einander gleich sein, sohin

$$
\begin{aligned}
300 + \frac{300}{1{\cdot}03} + \frac{300}{1{\cdot}03^2} + \dots + \frac{300}{1{\cdot}03^{11}} &=\\
= \frac{x}{1{\cdot}03^4} + \frac{x}{1{\cdot}03^5} + \frac{x}{1{\cdot}03^6} + \dots + \frac{x}{1{\cdot}03^{11}} &\quad \text{oder}
\end{aligned}
$$

$$
300\left[1 + \mathrm{T\,IV}_3^{(11}\right] = \frac{x}{1{\cdot}03^3} \,.\, \mathrm{T\,IV}_3^{(8}; \text{ hieraus ist}
$$

$$
x = \frac{1{\cdot}092727 \,.\, 300 \,.\, 10{\cdot}25262411}{7{\cdot}01969219} = 478{\cdot}80\ K.
$$

Jemand hat Anspruch auf eine durch eine gewisse Zeit *alljährlich im vorhinein* fällige Rate von 1200 K und will dieselbe in Hinkunft *vierteljährig im nachhinein* ausbezahlt erhalten. Wie groß ist eine solche Quartalsrate, wenn eine $3^1/_2$%ige Jahresverzinsung zugrunde gelegt wird?

Nachdem die *Bezugsdauer* — wie unschwer einzusehen ist — für die Rechnung nicht in Betracht kommt, hat man nur den Barwert einer *Jahreszahlung* gleichzusetzen dem Barwert von *4 Quartalsraten*, so daß

$$
1200 = \frac{x}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{x}{r^{\frac{2}{4}}} + \frac{x}{r^{\frac{3}{4}}} + \frac{x}{r^{\frac{4}{4}}} = x\left(\frac{1}{r^{\frac{4}{4}}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{4}}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{4}}}\right) = x\,\frac{r-1}{r\left(r^{\frac{1}{4}} - 1\right)}
$$

$$
x = \frac{1200 \,.\, 1{\cdot}035 \,.\, (1{\cdot}00864 - 1)}{1{\cdot}035 - 1} = 306{\cdot}60\ K.
$$

In analoger Weise hat man vorzugehen, wenn umzuwandeln ist:

a) eine jährlich nachhinein zahlbare Rente von 1000 K in eine monatlich vorhinein zahlbare Rente;

b) eine $^1/_4$jährig vorhinein zahlbare Rente von 250 K in eine monatlich nachhinein zahlbare;

c) eine monatlich nachhinein zahlbare Rente von 100 K in eine $^1/_2$jährig vorhinein zahlbare Rente.

Zu beachten ist hiebei nur, daß, wenn der längere der bei den beiden Zahlungsmodalitäten in Betracht kommenden Zeiträume nur

ein Semester oder ein Quartal umfaßt, es natürlich genügt, beiderseits auch nur den Wert der ein Semester, beziehungsweise ein Quartal darstellenden Zahlungen in Berücksichtigung zu ziehen.

Sohin folgt

$$\text{ad } a)\quad \frac{1000}{r} = x\left(1 + \frac{1}{r^{\frac{1}{12}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{12}}} + \cdots + \frac{1}{r^{\frac{11}{12}}}\right) = x\,\frac{r-1}{r^{\frac{11}{12}}\left(r^{\frac{1}{12}}-1\right)} \quad \text{und}$$

$$x = \frac{1000\left(r^{\frac{1}{12}}-1\right)}{r^{\frac{1}{12}}(r-1)} = \frac{1000\,(1{\cdot}002871-1)}{1{\cdot}002871\,.\,0{\cdot}035} = 81{\cdot}80\ K$$

$$\text{ad } b)\quad 250 = y\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{12}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{12}}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{12}}}\right) = y\,.\,\frac{r^{\frac{3}{12}}-1}{r^{\frac{3}{12}}\left(r^{\frac{1}{12}}-1\right)} \quad \text{und}$$

$$y = \frac{250\,.\,1{\cdot}035^{\frac{1}{4}}\left(1{\cdot}035^{\frac{1}{12}}-1\right)}{1{\cdot}035^{\frac{1}{4}}-1} = 83{\cdot}80\ K$$

$$\text{ad } c)\quad 100\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{12}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{12}}} + \cdots + \frac{1}{r^{\frac{6}{12}}}\right) = z = \frac{100\left(r^{\frac{1}{2}}-1\right)}{r^{\frac{1}{2}}\left(r^{\frac{1}{12}}-1\right)} = 594{\cdot}20\ K.$$

Jemand hat Anspruch auf eine um 3 Jahre aufgeschobene und dann durch 10 Jahre in monatlichen Vorhineinraten zahlbare Rente von 200 K, will aber dafür eine nach 5 Jahren beginnende und dann durch 10 Jahre in Pränumerando-Semesterraten zahlbare Rente beziehen. Wie groß ist dieselbe bei $3^1/_2{}^0/_0$igem Zinsfuß?

$$\frac{200}{r^3}\left(1 + \frac{1}{r^{\frac{1}{12}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{12}}} + \cdots + \frac{1}{r^{\frac{119}{12}}}\right) = \frac{x}{r^5}\left(1 + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{2}}} + \cdots + \frac{1}{r^{\frac{19}{2}}}\right) \quad \text{oder}$$

$$\frac{200\,(r^{10}-1)}{r^{\frac{119}{12}}\left(r^{\frac{1}{12}}-1\right)} = \frac{x\,(r^{10}-1)}{r^2\,.\,r^{\frac{19}{2}}\left(r^{\frac{1}{2}}-1\right)} \quad \text{oder}$$

$$\frac{200}{r^{10}-r^{\frac{119}{12}}} = \frac{x}{r^2\,(r^{10}-r^{9\cdot5})} \quad \text{und hieraus ist}$$

$$x = \frac{200\,(r^{12}-r^{11\cdot5})}{r^{10}-r^{\frac{119}{12}}} = 1276\ K.$$

Steigende (fallende) Renten.

Es ist der Barwert einer $n$mal im nachhinein zahlbaren *steigenden* Rente zu bestimmen, deren erste Rate R und jede folgende um $s^0/_0$ größer als die vorangehende ist.

$$(\mathrm{v}_{|n}a) = \frac{R}{r} + \frac{R\left(1+\frac{s}{100}\right)}{r^2} + \frac{R\left(1+\frac{s}{100}\right)^2}{r^3} + \cdots + \frac{R\left(1+\frac{s}{100}\right)^{n-1}}{r^n}.$$

Setzt man den Ausdruck $1 + \frac{s}{100} = \sigma$, so folgt für

$$(\mathrm{v}_{|n}a) = \frac{R}{r}\left(1 + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \cdots + \frac{\sigma^{n-1}}{r^{n-1}}\right) = R\,\frac{\sigma^n - r^n}{r^n(\sigma - r)}.$$

Für $\sigma = 1$ geht der Barwert über in

$$(\mathrm{v}_{|n}a) = R\,\frac{r^n-1}{r^n(r-1)},$$

d. i. die *konstante* nachschüssige Rente im Betrage R (siehe S. 32).

Für $\sigma = r$ würde resultieren

$$(\mathrm{v}_{|n}a) = R\,\frac{r^n - r^n}{r^n(r-r)} = \frac{0}{0}.$$

Diesen unbestimmten Ausdruck kann man umgehen, wenn die Substitution schon in der Grundgleichung vorgenommen wird; dann ist nämlich

$$(\mathrm{v}_{|n}a) = \frac{R}{r}\left(1 + \frac{r}{r} + \frac{r^2}{r^2} + \cdots + \frac{r^{n-1}}{r^{n-1}}\right) = \frac{n\,.\,R}{r}.$$

Jemand hat dem Erfinder eines Patentes die für die Auswertung desselben nötigen Kapitalien vorgestreckt und dafür den Anspruch auf eine mit Ablauf des ersten Geschäftsjahres beginnende und dann 10mal zu zahlende Jahresrente erworben, deren erste Rate 2000 K und deren jede folgende um $10^0/_0$ mehr als die vorangehende beträgt. Um welchen Betrag könnte der Bezugsberechtigte seine Ansprüche aus dem Vertrage unter Annahme einer $3^3/_4{}^0/_0$igen Verzinsung abtreten?

$$R = 2000 \quad \sigma = 1{\cdot}1, \quad n = 10, \quad r = 1{\cdot}0375$$

$$x = 2000\,\frac{1{\cdot}1^{10} - 1{\cdot}0375^{10}}{1{\cdot}0375^{10}\,.\,0{\cdot}0625} = 25\,437{\cdot}53\ K.$$

Den Barwert der *pränumerando* zahlbaren steigenden Rente erhält man aus den vorstehenden Resultaten dadurch, daß man dieselben mit r multipliziert.

Ist die erste Rate nicht sofort, sondern erst nach k Jahren fällig, dann ergibt sich als Barwert dieser *aufgeschobenen steigenden* Rente

$$(\mathrm{v}_{k|n}a) = \frac{R}{r^k} + \frac{R\,.\,\sigma}{r^{k+1}} + \frac{R\,.\,\sigma^2}{r^{k+2}} + \cdots + \frac{R\,\sigma^{n-1}}{r^{k+n-1}}$$

$$= \frac{R}{r^k}\left(1 + \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma^2}{r^2} + \cdots + \frac{\sigma^{n-1}}{r^{n-1}}\right) = R\,\frac{\sigma^n - r^n}{r^{k+n-1}(\sigma - r)}.$$

Für $\sigma = 1$ geht dieser Ausdruck über in

$$(\mathrm{v}_{k|n}a) = R\,\frac{r^n - 1}{r^{k+n-1}(r-1)},$$

d. i. der Barwert der um k Jahre aufgeschobenen *konstanten* Rente und für $\sigma = r$ erhält man

$$(\mathrm{v}_{k|n}a) = \frac{n\,.\,R}{r^k}.$$

Ist die nächstjährige Rate jeweils um den gleichen absoluten Betrag (δ) größer als die vorhergehende, steigt also die Rente in

Form einer *arithmetischen Progression* an, dann ergibt sich als Barwert — die erste Rate wäre nach k Jahren fällig — dieser aufgeschobenen steigenden und n mal zahlbaren Rente

$$(v_{k|n}a) = \frac{R}{r^k} + \frac{R+\delta}{r^{k+1}} + \frac{R+2\delta}{r^{k+2}} + \dots + \frac{R+(n-1)\delta}{r^{k+n-1}}$$

$$= \frac{R}{r^k}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) + \frac{\delta}{r^k}\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \dots + \frac{n-1}{r^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{R}{r^k}\left[1 + \mathrm{T\,IV}_p^{(n-1}\right] + \frac{\delta}{r^k}\cdot z, \text{ wobei}$$

$$z = v + 2v^2 + 3v^3 + \dots + (n-1)v^{n-1};$$

diese Reihe ergibt, analog behandelt wie der auf S. 27 dargestellte Ausdruck y,

$$z = \frac{1}{v-1}\left(n v^n - v\frac{v^n-1}{v-1}\right)$$

oder, wenn wieder r eingeführt wird,

$$z = \frac{1}{\frac{1}{r}-1}\left(n\frac{1}{r^n} - \frac{1}{r}\,\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r}-1}\right)$$

$$= \frac{r}{r-1}\left[\frac{r^n-1}{r^n(r-1)} - \frac{n}{r^n}\right] = \frac{1}{r^{n-1}(r-1)}\left(\frac{r^n-1}{r-1} - n\right).$$

Diesen Wert in die frühere Gleichung eingesetzt, ergibt

$$(v_{k|n}a) = \frac{1}{r^k}\left\{R\left[1 + \mathrm{T\,IV}_p^{(n-1}\right] + \frac{\delta}{r^n - r^{n-1}}\left(\frac{r^n-1}{r-1} - n\right)\right\}$$

Für $d=0$ geht diese Gleichung über in

$$(v_{k|n}a) = \frac{1}{r^k}\left\{R\left[1 + \mathrm{T\,IV}_p^{(n-1}\right]\right\},$$

d. i. der Barwert einer aufgeschobenen *konstanten* Rente.

Wie groß ist der Wert der aus dem obigen Patentvertrag resultierenden Ansprüche, wenn die erste Jahresrate per 2000 K erst nach 5 Jahren fällig und jede folgende um 500 K größer als die vorhergehende ist?

$$R = 2000, \quad \delta = 500, \quad n = 10, \quad k = 5, \quad p = 3^3/_4$$

$$x = \frac{1}{1{\cdot}0375^5}\left\{2000\left[1 + \mathrm{T\,IV}_{3^3/_4}^{(9}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{500}{1{\cdot}0375^{10} - 1{\cdot}0375^9}\left(\frac{1{\cdot}0375^{10}-1}{0{\cdot}0375} - 10\right)\right\} = 29.051\ K.$$

Werden in den vorstehenden Formeln anstatt s, beziehungsweise δ die Werte $-s$, beziehungsweise $-\delta$ eingesetzt, so geht die steigende in eine *fallende* Rente über, für welche dieselben Formeln, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen vor s, beziehungsweise δ gelten.

Zweiter Abschnitt.

Antizipative Verzinsung.

§ 13.

Bei der antizipativen Verzinsung bekommt der Schuldner für einen auf $\mathfrak{K}$ Kronen lautenden und nach einem Jahre einzulösenden Schuldschein nur den um die einjährigen Zinsen verminderten Betrag, das sind, wenn zum Unterschiede von der dekursiven Verzinsung der jährliche Zinsfuß mit π bezeichnet wird,

$$\mathfrak{K} - \mathfrak{K}\frac{\pi}{100} = \mathfrak{K}\left(1 - \frac{\pi}{100}\right)$$

bar ausbezahlt. Wenn er nun für $\mathfrak{K}\left(1 - \frac{\pi}{100}\right)$ zu Beginn des Jahres erhaltene Kronen am Schlusse desselben $\mathfrak{K}$ Kronen zurückzuzahlen hat, so hat er für $\mathfrak{K}$ zu Beginn des Jahres empfangene Kronen am Schlusse desselben x zurückzuzahlen; es verhält sich demnach

$$x : \mathfrak{K} = \mathfrak{K} : \mathfrak{K}\left(1 - \frac{\pi}{100}\right)$$

und hieraus ist

$$x = \mathfrak{K}\frac{100}{100-\pi}.$$

Den Ausdruck $\frac{100}{100-\pi}$ wollen wir den *antizipativen Aufzinsungsfaktor* nennen und mit ϱ bezeichnen. Es ist demnach bei antizipativer Verzinsung

der Wert des Kapitales $\mathfrak{K}$ nach	1 Jahr:	$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}\,.\,\varrho$
„ „ „ „ „ „	2 Jahren:	$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1\,.\,\varrho = \mathfrak{K}\,.\,\varrho^2$
„ „ „ „ „ „	3 „	$\mathfrak{K}_3 = \mathfrak{K}_2\,.\,\varrho = \mathfrak{K}\,.\,\varrho^2$
. . . .		
„ „ „ „ „ „	n „	$\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_{n-1}\,\varrho = \mathfrak{K}\,.\,\varrho^n$ . . . I')

Die Werte für ϱ sind (bezüglich der Zinsfüße 2, $2^1/_4$, $3^1/_2$ und 4) in analoger Weise wie jene für r in Tabelle I (S. 12 der Hilfs-

Tabellen) zusammengestellt, so daß sich die Bestimmung des Endwertes auch hier auf eine einfache Multiplikation reduziert.

Auf welchen Betrag wachsen 1000 K in 3 Jahren bei 4%iger antizipativer Verzinsung an?

$$\mathfrak{K}_3 = 1000 \,.\, 1{\cdot}13028067 = 1130{\cdot}28\ K.$$

Zu dem Resultate hätte man auch auf folgende Weise gelangen können:

1000 K wachsen in 1 Jahre an auf $1000 \,.\, \frac{100}{96} = 1000:0{\cdot}96 = 1041{\cdot}67\ K$;

1041·67 K „ „ 1 „ „ „ $1041{\cdot}67:0{\cdot}96 = 1085{\cdot}09$ „ ;

1085·09 „ „ „ 1 „ „ „ $1085{\cdot}09:0{\cdot}96 = 1130{\cdot}28$ „

Aus der Formel I) ergibt sich das Anfangskapital als

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_n \,.\, \frac{1}{\varrho^n};$$

man braucht sohin bloß den Endwert durch die in Tabelle I enthaltenen bezüglichen Aufzinsungsfaktoren zu dividieren oder mit den in Tabelle II (S. 13 der Hilfs-Tabellen) zusammengestellten reziproken Werten derselben — den Abzinsungsfaktoren — zu multiplizieren. Die Zahl der Zinstermine bestimmt sich mit

$$n = \frac{\log \mathfrak{K}_n - \log \mathfrak{K}}{\log \varrho}$$

und der Zinsfuß mit

$$\log \varrho = \frac{\log \mathfrak{K}_n - \log \mathfrak{K}}{n}.$$

Sämtliche Formeln sind, wie man sieht, mit den bezüglichen in den §§ 1 und 3 für die dekursive Verzinsung abgeleiteten bis auf den Umstand identisch, daß anstatt r der Wert ϱ zu setzen ist.

In welcher Zeit geben 2500 K bei 3½%iger antizipativer Verzinsung ein Guthaben von 4266·09 K?

$$n = \frac{\log 4266{\cdot}09 - \log 2500}{\log 1{\cdot}036269} = 15.$$

Zu welchem antizipativen Zinsfuß müssen 700 K angelegt werden, damit dieselben in 10 Jahren auf 878·88 K anwachsen?

$$\log \varrho = \frac{\log 878{\cdot}88 - \log 700}{10} = 0{\cdot}0098832$$

$$\varrho = 1{\cdot}023018 = \frac{100}{100 - x}, \text{ demnach ist}$$

$$102{\cdot}3018 - 100 = 1{\cdot}023018\,x \quad \text{und} \quad x = 2{\cdot}25$$

Die Resultate der beiden letzten Beispiele kann man auch unmittelbar aus der Tabelle I entnehmen, indem man den Quotienten $\frac{\mathfrak{K}_n}{\mathfrak{K}} = 1{\cdot}70644$, beziehungsweise $1{\cdot}25554$ ermittelt und nachsieht, bei welchem Termin unter 3½% (im ersteren Falle), beziehungsweise unter welchem Zinsfuß bei Termin 10 (im letzteren Falle) der bezügliche Quotient sich vorfindet.

§ 14.

Beziehung zwischen antizipativer und dekursiver Verzinsung.

Da der Endwert eines Kapitales nur von der jeweiligen Größe der bezüglichen Aufzinsungsfaktoren abhängt, braucht man auch nur diese einander gegenüber zu stellen, wenn man das Guthaben vergleichen will, welches bei *antizipativer* und welches bei *dekursiver* Verzinsung innerhalb derselben Verzinsungsdauer und unter Zugrundelegung desselben Zinsfußes resultiert.

$$\text{Für } \pi = p \text{ ist } \varrho = \frac{100}{100 - p} = 1 + \frac{p}{100} + \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \ldots,$$

sohin ϱ größer als $r \left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$, demnach auch

$$\varrho^n > r^n \text{ und } \mathfrak{K}_n > K_n.$$

Wenn man also ein Kapital durch dieselbe Zeit und zum gleichen Zinsfuß das einemal antizipativ, das anderemal dekursiv anlegt, so wird der Endwert bei antizipativer Verzinsung größer sein, das Kapital demnach rascher anwachsen als bei dekursiver Verzinsung. Hieraus folgt, daß, wenn für die gleiche Verzinsungsdauer sich auch gleiche Endwerte ergeben sollen, der zugrunde gelegte antizipative Zinsfuß kleiner sein muß als der bezügliche dekursive Zinsfuß und umgekehrt. Ist p gegeben und die Gleichung

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{100}{100 - \pi}$$

nach π aufzulösen, so erhält man

$$100 - \pi = \frac{100^2}{100 + p} \text{ und für}$$

$$\pi = \frac{100^2 + 100\,p - 100^2}{100 + p} = \frac{100\,p}{100 + p}.$$

Ist π bekannt, dann folgt für

$$p = \frac{100^2}{100 - \pi} - 100 = \frac{100\,\pi}{100 - \pi}$$

Auf Grund dieser beiden Gleichungen ergeben sich die folgenden Werte:

Dekursiver	Äquivalenter antizipativer	Antizipativer	Äquivalenter dekursiver
Zinsfuß			
3%	2·91262	3%	3·09278
3½%	3·38164	3½%	3·62694
4%	3·84616	4%	4·16667
4¼%	4·07674	4¼%	4·43864

§ 15.

Konformer Zinsfuß.

Werden 1000 K ein Jahr lang antizipativ verzinst, so wachsen sie

bei einem Zinsfuß von 4% per annum auf 1041·67 K
" " " " 2% " Semester " 1041·23 "

an, so daß auch hier zwischen *relativem* und *konformem* Zinsfuß ein Unterschied zu machen ist. Das Beispiel zeigt aber, *daß der unterjährige relative Zinsfuß (2% pro Semester) — im Gegensatze zu den bezüglichen Folgerungen bei dekursiver Verzinsung* (§ 5) — *zu einem kleineren Endwert führt als der ganzjährige Zinsfuß.*

Bedeutet π den antizipativen Jahres- und τ den terminlichen Zinsfuß (1 Jahr = m Termine), dann muß folgende Gleichung bestehen:

$$\frac{100}{100-\pi} = \left(\frac{100}{100-\tau}\right)^m; \text{ hieraus erhält man}$$

$$100-\pi = 100\left(\frac{100-\tau}{100}\right)^m \quad \text{und}$$

$$\pi = 100\left[1-\left(\frac{100-\tau}{100}\right)^m\right] \quad \ldots\ldots \; 1)$$

Wird π als bekannt vorausgesetzt, dann ist

$$\frac{100-\tau}{100} = \sqrt[m]{\frac{100-\pi}{100}} \quad \text{oder}$$

$$100-\tau = 100\sqrt[m]{\frac{100-\pi}{100}} \quad \text{und}$$

$$\tau = 100\left[1-\sqrt[m]{\frac{100-\pi}{100}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \; 2)$$

Setzt man nun in diese beiden Gleichungen, dem obigen Beispiele entsprechend,

$$m = 2 \text{ und } \tau = 2,$$

so ergibt sich

$$\pi = 100\left[1-\left(\frac{98}{100}\right)^2\right] = 3{\cdot}96$$

und für $m = 2$ und $\pi = 4$ ist

$$\tau = 100\left[1-\sqrt{\frac{96}{100}}\right] = 2{\cdot}0204.$$

Es ist somit bei antizipativer Verzinsung gleichgiltig, ob man ein Kapital zu 2% pro Semester oder zu 3·96% pro anno, beziehungsweise zu 4% pro anno oder zu 2·02% pro Semester verzinst.

Probe: 500 K geben in 3 Jahren

zu 2% pro Semester ein Guthaben von $500 \,.\, 1{\cdot}128869 = 564{\cdot}44$ K
und " 3·96 " anno " " " $500\left(\frac{100}{96{\cdot}04}\right)^3 = 564{\cdot}44$ " ;

oder 300 K geben in 5 Jahren

zu 2·02% pro Semester ein Guthaben von $300\left(\frac{100}{97{\cdot}98}\right)^{10} = 367{\cdot}93$ K
und " 4% " anno " " " $300 \,.\, 1{\cdot}22643302 = 367{\cdot}93$ " .

Man kann die Probe aber auch noch auf eine andere Art machen, womit gleichzeitig allgemein bewiesen wird, worin die Ursache der entgegengesetzten Resultate hinsichtlich des konformen Zinsfußes bei der dekursiven und antizipativen Verzinsung liegt.

Wenn 1000 K zu 4% antizipativ ganzjährig geliehen werden, erhält der Gläubiger sofort 40 K an Zinsen; beträgt die Verzinsung jedoch 2% pro Semester, dann werden sofort nur 20 K und nach einem Semester wieder 20 K fällig, deren heutiger Wert aber kleiner als 20 ist. Will man jedoch auch bei halbjähriger Verzinsung an jährlichen Zinsen einen Barwert von 40 K erhalten, so muß eine Semesterverzinsung von 2·0204% zugrunde gelegt werden. In diesem Falle erhält der Gläubiger sofort $1000 \cdot \frac{2{\cdot}0204}{100} = 20{\cdot}204$ und am Anfang des 2. Semesters denselben Betrag. Der Jetztwert beider Zahlungen ist

$$20{\cdot}204 + 20{\cdot}204 \cdot \frac{100-2{\cdot}0204}{100} = 40.$$

Werden in die beiden Gleichungen 1) und 2) die entsprechenden Werte für τ, beziehungsweise π eingesetzt, dann ergeben sich die zwei folgenden Tabellen:

Relativer Jahres-zinsfuß	Konformer Jahreszinsfuß, wenn die Zinsen entrichtet werden			
	jährlich ($m = 1$)	halbjährig ($m = 2$)	vierteljährig ($m = 4$)	monatlich ($m = 12$)
3%	3 —	2·9775	2·9664	2·9591
3½%	3·5	3·4694	4·4543	3·4444
4%	4 —	3·9600	3·9404	3·9274
4½%	4·5	4·4494	4·4246	4·4083

Jahreszinsfuß	Konformer Zinsfuß pro		
	Semester	Quartal	Monat
3%	1·5114	0·7586	0·2535
3½%	1·7656	0·8867	0·2965
4%	2·0204	1·0154	0 3396
4½%	2·2759	1·1445	0·3830

§ 16.

Tabellen III und IV.

Die im § 9 gelöste Aufgabe — Bestimmung des Endwertes alljährlich gemachter Einlagen — soll nun bei antizipativer Verzinsung durchgeführt werden. Das Guthaben am Schlusse des n^{ten} Jahres wird sich darstellen als

$$G = E_1 \cdot \varrho^n + E_2 \cdot \varrho^{n-1} + E_3 \cdot \varrho^{n-2} + \cdots + E_n \cdot \varrho$$

und für

$$E_1 = E_2 = E_3 = \cdots E_n = E,$$

als

$$G = E\varrho + E\varrho^2 + E\varrho^3 + \cdots + E\varrho^{n-1} + E\varrho^n$$
$$= E(\varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \cdots + \varrho^n).$$

Der Klammerausdruck stellt die Summe der antizipativen Aufzinsungsfaktoren (aus Tabelle I) dar und ist in Tabelle III antizipativ (S. 14 der Hilfs-Tabellen) zu finden, so daß man auch schreiben kann

$$G = E \, . \, \mathrm{T\,III}_{\pi}^{n}, \text{ beziehungsweise } E = \frac{G}{\mathrm{T\,III}_{\pi}^{n}}.$$

Auch diese Formeln sind mit jenen für die dekursive Verzinsung völlig identisch, nur ist ϱ anstatt r zu setzen. Mit dieser einzigen

Einschränkung haben auch alle sonstigen Ableitungen der §§ 9 und 10 für die antizipative Verzinsung Geltung.

Ist der Barwert einer $n$mal zahlbaren Rente $\mathfrak{R}$ zu bestimmen, so ist

für die Nachhinein-Rente
$$B = \frac{\mathfrak{R}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{R}}{\varrho^2} + \frac{\mathfrak{R}}{\varrho^3} + \cdots + \frac{\mathfrak{R}}{\varrho^n}$$
$$= \mathfrak{R}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \cdots + \frac{1}{\varrho^n}\right),$$

und für die Vorhinein-Rente
$$B = \mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{R}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{R}}{\varrho^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{R}}{\varrho^{n-1}}$$
$$= \mathfrak{R}\left(1 + \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \cdots + \frac{1}{\varrho^{n-1}}\right).$$

Der Ausdruck $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \cdots + \frac{1}{\varrho^n}$ ist die Summe der Werte aus Tabelle II und findet sich in Tabelle IV antizipativ (S. 15 der Hilfs-Tabellen), so daß die Barwerte auch dargestellt werden können durch

$B = \mathfrak{R} \, . \, \mathrm{T\,IV}_{\pi}^{n}$ für die nachschüssige Rente und
$B = \mathfrak{R}\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{\pi}^{(n-1)}]$ für die vorschüssige Rente.

Mit der obigen Einschränkung gelten demnach auch sämtliche Ableitungen des § 12 für die antizipative Verzinsung, so daß von einer weiteren Behandlung derselben Umgang genommen werden kann

---

C. Annuitäten-Rechnung (Tilgungspläne).

a) Bei dekursiver Verzinsung.

§ 17.

Kapitalstilgung im allgemeinen.

Die Rückzahlung eines aufgenommenen Darlehens kann entweder derart erfolgen, daß der Schuldner durch eine Reihe von Jahren nur die Zinsen und schließlich das ganze Kapital auf einmal rückerstattet oder aber, daß außer den aufgelaufenen Zinsen, sei es regelmäßig oder nur zeitweise, noch ein bestimmter Betrag als Kapitalstilgung entrichtet wird.

Würde sich beispielsweise ein Gläubiger nur ausbedingen, daß ihm der Schuldner den am 1. April 1920 geliehenen Betrag von 1000 *K innerhalb 5 Jahren* mit 4%igen Zinsen rückerstattet, Zahlungen jedoch nur jeweils am 31. März entgegennimmt, so könnte der Schuldner das Darlehen etwa in folgender Art tilgen:

Er zahlt

	an 4%igen Zinsen	als Tilgung	zusammen	sohin noch verbleibende Schuld
am 31. März 1921:	40 *K*	100	$140 = a_1$	900 *K*
„ 31. „ 1922:	36 „	—	$36 = a_2$	900 „
„ 31. „ 1923:	36 „	300	$336 = a_3$	600 „
„ 31. „ 1924:	24 „	200	$224 = a_4$	400 „
„ 31. „ 1925:	16 „	400	$416 = a_5$	—

Die nach Entrichtung der ersten Zahlung verbleibende Schuld kann entweder als Differenz zwischen dem dargeliehenen Kapital und dem zurückgezahlten Betrag $(1000 - 100 = 900)$ oder unter Berücksichtigung der entrichteten Zinsen durch die Gleichung

$$1000 + 1000 \cdot \frac{4}{100} - 140 = 1000 + 40 - 140 = 900$$

dargestellt werden. Allgemein wird sich sonach als Schuld am Schlusse des 1. Jahres ergeben: $S_1 = K + K \cdot \frac{p}{100} - a_1 = K \cdot r - a_1$

des 2. Jahres ergeben: $S_2 = S_1 + S_1 \cdot \frac{p}{100} - a_2 = S_1 r - a_2$
$= K \cdot r^2 - a_1 r - a_2$

„ 3. „ „ $S_3 = S_2 r - a_3 = K \cdot r^3 - a_1 r^2 - a_2 r - a_3$

. . . .

„ n^{ten} „ „ $S_n = S_{n-1} \cdot r - a_n$
$= K r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n$

Da aber am Schlusse des n^{ten} Jahres das Kapital getilgt, sohin $S_n = 0$ sein muß, so folgt

$$K r^n = a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + a_3 r^{n-3} + \ldots + a_{n-1} \cdot r + a_n{}^{*)} \text{ oder}$$

$$K = \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{a_n}{r^n}.$$

Diese Gleichung besagt, daß das dargeliehene Kapital gleich der Summe der auf den Zeitpunkt des Darlehensempfanges abgezinsten Zahlungen an Zinsen und Tilgungsbeträgen oder: die Leistung des Gläubigers gleich jener des Schuldners ist.

Die bezügliche Probe für den vorstehenden Fall ergibt $(r = 1{\cdot}04)$:

$$\frac{140}{r} + \frac{36}{r^2} + \frac{336}{r^3} + \frac{224}{r^4} + \frac{416}{r^5} = 134{\cdot}62 + 33{\cdot}28 + 298{\cdot}70 + 191{\cdot}48 + $$
$$+ 341{\cdot}92 = 1000.$$

Die *Amortisierung* eines in n Jahren zu tilgenden Kapitales K könnte auch in der Weise vor sich gehen, daß außer den p%igen Zinsen vom jeweiligen Schuldrest noch alljährlich der Betrag $\frac{K}{n}$ zurückgezahlt wird.

Der frühere Fall würde sich dann folgendermaßen darstellen: Der Schuldner zahlt

	an 4%igen Zinsen	als Tilgung	zusammen	sohin noch verbleibende Schuld
am 31. März 1921:	40	200	$240 = a_1$	800
„ 31. „ 1922:	32	200	$232 = a_2$	600
„ 31. „ 1923:	24	200	$224 = a_3$	400
„ 31. „ 1924:	16	200	$216 = a_4$	200
„ 31. „ 1925:	8	200	$208 = a_5$	—

In diesem Falle sind die in den einzelnen Jahren vom Schuldner zu entrichtenden Gesamtleistungen nicht mehr willkürlich, aber auch keineswegs untereinander gleich, sondern vermindern sich alljährlich um einen konstanten Betrag.

*) Vgl. § 11.

§ 18.

Tilgung durch Nachhinein-Annuitäten.

Die gebräuchlichste Form der Kapitalstilgung ist die Rückzahlung mittels *Annuitäten*. In diesem Falle werden während einer bestimmten Anzahl von Terminen in der Regel am Schlusse derselben gleich große, Zinsen und Kapitalsrückzahlung enthaltende Beträge von Seite des Schuldners entrichtet. Bezeichnen wir dieselben mit a und nehmen wir an, daß sie behufs Tilgung des Kapitales K $n$mal am Jahresschlusse gezahlt werden sollen, so wird, da die Leistung des Gläubigers gleich jener des Schuldners sein muß, die Gleichung bestehen

$$K = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \cdots + \frac{a}{r^n}$$

$$= a\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right) = \frac{a}{r^n}\,\frac{r^n - 1}{r - 1} = a\,.\,\mathrm{T\,IV}_p^{(n} \qquad \text{IV)}$$

Hieraus folgt für

$$a = \frac{K}{\mathrm{T\,IV}_p^{(n}}\text{*)}.$$

Wie groß muß die durch 45 Jahre jeweils am Jahresschlusse zu entrichtende Annuität sein, um bei 4%iger Verzinsung ein Darlehen von 1,000.000 K zu tilgen?

$$a = \frac{1\,000\,000}{\mathrm{T\,IV}_4^{(45}} = \frac{1\,000\,000}{20{\cdot}7200397} = 48.262{\cdot}46\ K.$$

Welche Annuität müßte 70mal jeweils am Ende eines Semesters bezahlt werden, um damit bei $2^1/_8$%iger Verzinsung pro Halbjahr eine Schuld von 50.000 K zu tilgen?

Da der Zinsfuß $2^1/_8$% in der Tabelle nicht enthalten ist, muß der Wert für a aus der Gleichung

$$50\,000 = \frac{a}{1{\cdot}02125} + \frac{a}{1{\cdot}02125^2} + \cdots + \frac{a}{1{\cdot}02125^{70}} = \frac{a}{1{\cdot}02125^{70}}\,\frac{1{\cdot}02125^{70} - 1}{1{\cdot}02125 - 1}$$

berechnet werden; man erhält dann

$$a = \frac{50\,000\,.\,1{\cdot}02125^{70}\,.\,0{\cdot}02125}{1{\cdot}02125^{70} - 1} = 1378{\cdot}95\ K.$$

Würde dieser Aufgabe ein Zinsfuß von 2% pro Semester zugrunde liegen, dann könnte die Tabelle IV benützt werden und wäre zu bilden

*) Vgl. hiemit Beispiele betreffend die Kapitalstilgung S. 31.

$$50\,000 = \frac{a}{1{\cdot}02} + \frac{a}{1{\cdot}02^2} + \frac{a}{1{\cdot}02^3} + \cdots + \frac{a}{1{\cdot}02^{50}} + \frac{a}{1{\cdot}02^{51}} + \cdots + \frac{a}{1{\cdot}02^{70}}$$

$$= a\left[\frac{1}{1{\cdot}02} + \frac{1}{1{\cdot}02^2} + \cdots + \frac{1}{1{\cdot}02^{50}} + \frac{1}{1{\cdot}02^{50}}\left(\frac{1}{1{\cdot}02} + \frac{1}{1{\cdot}02^2} + \cdots + \frac{1}{1{\cdot}02^{20}}\right)\right]$$

$$= a\left[\mathrm{T\,IV}_2^{(50} + \frac{1}{1{\cdot}02^{50}}\,.\,\mathrm{T\,IV}_2^{(20}\right]$$

$$= a\,[31{\cdot}42360589 + 0{\cdot}37152788\,.\,16{\cdot}35143334]\text{, sohin}$$

$$a = 1333{\cdot}38\ K.$$

Sind die Größen K, a und p gegeben, so erhält man aus der Gleichung

$$K = \frac{a}{r^n}\,\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

den auch bereits auf S. 31 ermittelten Wert

$$n = \{\log a - \log\,[a - Ki]\} : \log r.$$

Durch wie viele nachschüssige Jahresannuitäten à 9365·46 K wird ein Kapital von 200.000 K bei $3^1/_2$%iger Verzinsung getilgt?

$$n = \{\log 9365{\cdot}46 - \log\,[9365{\cdot}46 - 200\,000\,.\,0{\cdot}035]\} : \log 1{\cdot}035 = 40.$$

Der Wert für n läßt sich aber auch — vorausgesetzt, daß für den in Frage kommenden Zinsfuß die entsprechenden Werte in der Tabelle IV enthalten sind — unmittelbar aus dieser entnehmen. Aus Gleichung IV) folgt nämlich

$$\mathrm{T\,IV}_p^{(n} = \frac{K}{a}\text{, demnach für das vorstehende Beispiel}$$

$$\mathrm{T\,IV}_{3^1/_2}^{(n} = \frac{200\,000}{9365{\cdot}46} = 21{\cdot}35507.$$

Sucht man nun in Tabelle IV) unter $3^1/_2$% nach diesem Quotienten, so findet man ihn beim Termin 40 verzeichnet.

Soll die Gleichung IV) nach r aufgelöst, also bei gegebenem K, a und n der Zinsfuß p ermittelt werden, dann muß man ein ähnliches Näherungsverfahren wie auf den Seiten 25 bis 28 einschlagen.

Bei welchem Zinsfuße wird ein Darlehen von 300.000 K durch 50 jährliche Nachhinein-Annuitäten à 14 265·30 K getilgt?

In Analogie zu dem früheren Beispiele ist

$$\mathrm{T\,IV}_p^{(50} = \frac{300\,000}{14265{\cdot}30} = 21{\cdot}0301.$$

Würde sich dieser Wert in Tabelle IV unter dem Termin 50 vorfinden, so wäre die Aufgabe schon gelöst. Nun zeigt aber die Tabelle

bei $4^0/_0$ den Wert 21·482 . . .
und „ $4^1/_4{}^0/_0$ „ „ 20·593 . . .,

so daß der zu suchende Zinsfuß zwischen 4 und $4^1/_4{}^0/_0$ liegt. Setzt man dementsprechend $p = 4^1/_8$ und berechnet

$$T\,IV_{4^1/_8}^{(50} = \frac{1{\cdot}04125^{50} - 1}{1{\cdot}04125^{50}\,.\,0{\cdot}04125},$$

so erhält man hiefür 21·0301. Der fragliche Zinsfuß beträgt sohin $4^1/_8{}^0/_0$.

§ 19.

Aufstellung eines Tilgungsplanes.

Durch die Auflösung der Gleichung IV) nach den verschiedenen Unbekannten scheint die Frage der Kapitalstilgung eigentlich erschöpft. Und doch ist dies durchaus nicht der Fall. Sowohl Gläubiger als auch Schuldner benötigen nämlich für die Aufstellung ihrer jährlichen Bilanz die jeweilige Höhe der noch zu fordernden, beziehungsweise noch schuldigen Darlehenssumme und müssen wissen, welcher Teil der Annuität jeweils als Zinsen zu buchen ist. Um nun die Vornahme jährlicher Berechnungen zu vermeiden, empfiehlt es sich, gleich von vornherein eine *Darstellung des genauen Verlaufes der allmählichen Kapitalsrückzahlung* oder einen sogenannten *Tilgungsplan* anzulegen.

Es ist der Tilgungsplan für die Rückzahlung eines Kapitales von 100 000 K durch 6 gleich große, jährliche Nachhinein-Annuitäten bei $4^0/_0$iger dekursiver Verzinsung aufzustellen.

Nach Gleichung IV) ist

$$a = \frac{K}{T\,IV_4^{(6}} = \frac{100\,000}{5{\cdot}24213686} = 19076{\cdot}19\ K.$$

Am Schlusse des 1. Jahres hat der Gläubiger zunächst Anspruch auf die $4^0/_0$igen Zinsen des dargeliehenen Kapitales, sohin auf 4000 K; da aber der Schuldner die Annuität 19 076·19 K zahlt, findet der die fälligen Zinsen übersteigende Betrag per 15 076·19 K als *Tilgungs-* oder *Amortisationsquote* des 1. Jahres Verwendung, wodurch sich die Schuld auf 84 923·81 K vermindert. Im 2. Jahre ist natürlich nur mehr dieser Betrag mit $4^0/_0$ zu verzinsen, so daß 3396·95 K als Zinsen und 15 679·24 K als 2. Tilgungsquote einzustellen sind und ein Schuldrest von 69 244·57 K verbleibt. Wird die Rechnung in diesem Sinne fortgesetzt, so ergibt sich für den Schluß des 5. Jahres ein Schuldrest von 18 342·49 K, welcher Betrag am Ende des 6. Jahres samt den hierauf entfallenden $4^0/_0$igen Zinsen durch die letzte Annuität abgestattet wird.

Der Tilgungsplan hat demnach die folgende Form:

Jahr	4% Zinsen		Tilgungsquote		Schuldrest	
	zu Ende des nebenstehenden Jahres					
	K	h	K	h	K	h
1	4.000	—	15.076	19	84.923	81
2	3.396	95	15 679	24	69.244	57
3	2.769	78	16.306	41	52.938	16
4	2.117	53	16.958	66	35.979	50
5	1.439	18	17.637	01	18.342	49
6	733	70	18.342	49	—	—
			100.000	—		

§ 20.

Kontrollproben.

Es ist ohne weiteres klar, daß, falls bei der Ermittlung irgend eines Zinsenbetrages ein Fehler unterläuft, nicht nur Tilgungsquote und Schuldrest des betreffenden Jahres, sondern der ganze folgende Teil des Tilgungsplanes unrichtig sind. Darum erscheint es unerläßlich — insbesondere bei einer größeren Anzahl von Annuitäten — den Gang der Rechnung von Zeit zu Zeit zu kontrollieren.

Bezeichnen wir die Tilgungsquoten der einzelnen Jahre mit $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$, dann ergeben sich, da sich die Annuität aus den Zinsen des jeweiligen Schuldrestes und aus der entsprechenden Tilgungsquote zusammensetzt, die folgenden Gleichungen, und zwar

für das 1. Jahr $a = K\,.\,\frac{p}{100} + t_1$ . . . . 1)

„ „ 2. „ $a = (K - t_1)\,\frac{p}{100} + t_2$ . . . . 2)

„ „ 3. „ $a = (K - t_1 - t_2)\,\frac{p}{100} + t_3$ . . . . 3)

. . . .

„ „ $(n-1)^{te}$ „ $a = (K - t_1 - t_2 - \cdots - t_{n-2})\,\frac{p}{100} +$
$+ t_{n-1}$ . . . . $n - 1$)

„ „ n^{te} „ $a = (K - t_1 - t_2 - \cdots - t_{n-1})\,\frac{p}{100} + t_n$ . . n)

Subtrahiert man nun

Gleichung 2) von Gleich. 1), so erhält man : $0 = t_1 + t_1\,\frac{p}{100} - t_2$ . . . α)

„ 3) „ „ 2), „ „ „ : $0 = t_2 + t_2\,\frac{p}{100} - t_3$ . . . β)

. . . .

„ n) „ „ $n-1$), „ „ „ : $0 = t_{n-1} + t_{n-1}\,\frac{p}{100} - t_n$ μ)

Aus Gleichung α) folgt: $t_2 = t_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = t_1 \,.\, r$

„ „ β) „ $t_3 = t_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = t_2 \,.\, r = t_1 \,.\, r^2$

. . . .

„ „ μ) „ $t_n = t_{n-1} \left(1 + \frac{p}{100}\right) = t_{n-1} \,.\, r = t_1 \,.\, r^{n-1}$

Diese Gleichungen besagen:

1. Jede folgende Tilgungsquote kann aus der vorhergehenden durch einfache Aufzinsung erhalten werden.

2. Die Tilgungsquote irgend eines, z. B. des k^{ten} Jahres stellt sich als Produkt aus der ersten Tilgungsquote und der $(k-1)^{ten}$ Potenz des Aufzinsungsfaktors dar.

Es wird daher insbesondere auf die möglichst genaue Bestimmung der ersten Tilgungsquote ankommen. Um nun diese unmittelbar aus den gegebenen Werten (Darlehenssumme, Anzahl der Annuitäten und Zinsfuß) berechnen zu können, braucht man nur zu erwägen, daß die Summe aller Tilgungsquoten dem dargeliehenen Kapital gleich sein muß oder

$$K = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n.$$

Drückt man nun die zweite und jede folgende Tilgungsquote durch die erste aus, so folgt

$$K = t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + \cdots + t_1 \,.\, r^{n-1}$$
$$= t_1 (1 + r + r_2 + \cdots + r^{n-1}),$$

beziehungsweise

$$t_1 = \frac{K}{1 + \mathrm{T\,III}_p^{n-1}}$$

und für den im früheren Paragraph gerechneten konkreten Fall

$$t_1 = \frac{K}{1 + \mathrm{T\,III}_4^{5}} = \frac{100\,000}{6{\cdot}63297546} = 15\,076{\cdot}190.$$

Will man beispielsweise die Tilgungsquote des 4. Jahres überprüfen, so hat man zu ermitteln

$$t_4 = t_1 \,.\, r^3 = 15\,076{\cdot}19 \,.\, 1{\cdot}124864 = 16\,958{\cdot}66.$$

Man kann aber nicht nur die Richtigkeit der Tilgungsquoten, sondern auch jene des Schuldrestes kontrollieren.

Da die Summe aller Tilgungsquoten gleich dem dargeliehenen Kapitale ist, so wird sich natürlich die Schuld durch Entrichtung jeder Annuität um die darin enthaltene Tilgungsquote vermindern und der Schuldrest irgend eines Jahres sich als Differenz zwischen dem ursprünglichen Kapitale und den bis dahin gezahlten Tilgungsquoten darstellen. Es wird demnach beispielsweise der Schuldrest am Schlusse des k^{ten} Jahres betragen

$$S_k = K - (t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k) = K - (t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + \cdots + t_1 r^{k-1})$$
$$\left.\begin{aligned} &= K - t_1 \left[1 + \mathrm{T\,III}_p^{(k-1)}\right] \\ &= K - t_1 \frac{r^k - 1}{r - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha)$$

Da

$$t_1 = \frac{K}{\frac{r^n - 1}{r - 1}} = K \frac{r - 1}{r^n - 1},$$

folgt für

$$S_k = K - K \frac{r - 1}{r^n - 1} \cdot \frac{r^k - 1}{r - 1} = K \left(1 - \frac{r^k - 1}{r^n - 1}\right)$$
$$= K \frac{r^n - r^k}{r^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \beta)$$

Nach diesen beiden Formeln ergibt sich für den in Rede stehenden Fall beispielsweise als Schuldrest am Schlusse des dritten Jahres

$$S_3 = K - t_1 \left[1 + \mathrm{T\,III}_4^{(2}\right]$$
$$= 100\,000 - 15\,076{\cdot}19 \,.\, 3{\cdot}1216 = 52.938{\cdot}16,$$ beziehungsweise
$$S_3 = K \,.\, \frac{r^6 - r^3}{r^6 - 1} = 100\,000 \frac{1{\cdot}04^6 - 1{\cdot}04^3}{1{\cdot}04^6 - 1} = 52.938{\cdot}16.$$

Der Schuldrest kann aber noch auf eine andere Art direkt ermittelt werden. Aus den beiden Gleichungen

$$K = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \cdots + \frac{a}{r^{n-1}} + \frac{a}{r^n}$$

und

$$K = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n$$

folgt

$$\frac{a}{r^n}(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) = t_1 (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$$

und

$$t_1 = \frac{a}{r^n};$$

hieraus ergibt sich

$$t_2 = t_1 \,.\, r = \frac{a}{r^{n-1}},\ t_3 = \frac{a}{r^{n-2}}, \ldots t_k = \frac{a}{r^{n-k+1}}, \ldots t_n = \frac{a}{r}.$$

Demnach ist

$$S_k = K - (t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k)$$
$$= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \cdots + \frac{a}{r^{n-k}} + \frac{a}{r^{n-k+1}} + \cdots + \frac{a}{r^{n-1}} + \frac{a}{r^n} -$$
$$- \left(\frac{a}{r^n} + \frac{a}{r^{n-1}} + \cdots + \frac{a}{r^{n-k+1}}\right)$$
$$= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \cdots + \frac{a}{r^{n-k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \gamma)$$

Diese Gleichung besagt, daß, wenn insgesamt n Annuitäten be-lungen sind, der Schuldrest nach Entrichtung der k^{ten} Annuität gleich dem Jetztwerte der noch ausstehenden $n-k$ Zahlungen des Schuldners ist oder mit anderen Worten: *die Leistung des Gläubigers muß jener des Schuldners nicht nur im Zeitpunkte der Darlehensübergabe, sondern auch in jedem beliebigen Zeitpunkte während der Kapitalsrückzahlung gleich sein.*

Demnach wird sich der Schuldrest beispielsweise am Schlusse des 2. Jahres in der vorliegenden Aufgabe auch darstellen lassen durch die Summe der Barwerte der noch ausstehenden Annuitäten des 3. bis 6. Jahres. Nachdem diese Zahlungen in 1, beziehungsweise 2, 3 und 4 Jahren fällig sind, ist

$$S_2 = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \frac{a}{r^4} = a \,.\, \mathrm{T\,IV}_4^4 = 19\,076{\cdot}19 \,.\, 3{\cdot}62989522 = 69\,244{\cdot}57.$$

§ 21.

Tilgungsplan mit gegebener runder Annuität.

Ein Darlehen von 30.000 K soll bei $4^1/_2$%iger dekursiver Verzinsung durch die jeweils am Jahresschlusse zu entrichtende Annuität von 6000 K amortisiert und der Tilgungsplan hiefür aufgestellt werden.

Der Vorgang hinsichtlich der Kapitalsabzahlung wird ein ganz ähnlicher wie beim früheren Beispiel sein. Die Zinsen des 1. Jahres betragen $\left(30\,000 \,.\, \frac{4{\cdot}5}{100} =\right)$ 1350.— K, sohin die erste Tilgungsquote $(6000 - 1350 =)$ 4650.— K und der Schuldrest am Schlusse des 1. Jahres 25.350.— K. Hievon sind wieder die $4^1/_2$%igen Zinsen zu rechnen usw. Für das Ende des 5. Jahres ergibt sich ein Schuldrest von 4561·20 K, dessen Tilgung im Laufe des nächsten Jahres zu erfolgen hat. Wird vorausgesetzt, daß die Zahlung des 6. Jahres ebenso wie die früheren erst am Schlusse desselben geleistet wird, dann sind außer den 4561·20 K noch die ganzjährigen $4^1/_2$%igen Zinsen davon, d. s. 205·25, demnach in Summe nicht mehr 6000, sondern nur 4766·45 K zu entrichten.

Nehmen wir an, das Darlehen wäre am 1. Juni 1919 gewährt worden, so wird der Tilgungsplan die folgende Form haben:

Datum	$4^1/_2$% Zinsen		Tilgungsquote		Schuldrest	
	K	h	K	h	K	h
1. Juni 1920	1350	—	4650	—	25.350	—
1. „ 1921	1140	75	4859	25	20.490	75
1. „ 1922	922	08	5077	92	15.412	83
1. „ 1923	693	58	5306	42	10.106	41
1. „ 1924	454	79	5545	21	4.561	20
1. „ 1925	205	25	4561	20	—	—
		R				
			30.000	—		

Von dem richtigen Gange der Rechnung kann man sich wiederum dadurch überzeugen, daß man irgend eine Tilgungsquote entweder aus der vorangehenden (nach der Gleichung $t_k = t_{k-1} r$) oder aus der ersten Tilgungsquote (nach der Gleichung $t_k = t_1 \,.\, r^{k-1}$) berechnet oder auch den Schuldrest irgend eines Jahres nach der Formel α) oder β) auf S. 55 unabhängig ermittelt. Hingegen wäre es unrichtig, für die Kontrolle des Schuldrestes die Formel γ) (§ 20) anzuwenden, da im vorliegenden Falle im letzten Jahre nicht die Annuität a, sondern ein kleinerer Betrag, der *Schlußrate* genannt werden soll, zur Zahlung gelangt. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes wird die Gleichung, welche den Wert der Leistungen des Gläubigers und des Schuldners im Zeitpunkte der Darlehensübergabe zur Darstellung bringt, lauten

$$K = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \cdots + \frac{a}{r^{n-1}} + \frac{R}{r^n},$$

wobei R jenen Betrag vorstellt, welchen der Schuldner am Schlusse des n^{ten} Jahres an Zinsen- und Kapitalstilgung zu zahlen hat. Multipliziert man die Gleichung mit r^n, so ergibt sich

$$K r^n = a\,(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r) + R, \text{ beziehungsweise}$$

$$R = K r^n - a \,.\, \mathrm{T\,III}_p^{n-1} = 30\,000 \,.\, 1{\cdot}30226012 - 6000 \,.\, 5{\cdot}71689166 = 4766{\cdot}45.$$

Will man also beispielsweise den Schuldrest des 3. Jahres unter Berücksichtigung der noch ausstehenden Zahlungen des Schuldners berechnen, dann hat man zu setzen

$$S_3 = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{R}{r^3} = 6000 \,.\, 1{\cdot}87266775 + 4766{\cdot}45 \,.\, 0{\cdot}8762966 = 15\,412{\cdot}83.$$

Diese Ermittlung des Schuldrestes setzt die Kenntnis von R voraus, das wiederum erst berechnet werden kann, wenn n bekannt ist. Da aber diese Größe unter den von vornherein gegebenen Daten nicht vorkommt und sich erst aus der vollständigen Durchrechnung des Tilgungsplanes ergeben hat, wird man in erster Linie n ermitteln müssen. In dem vorliegenden Falle kann man dies (auf die S. 51 angegebene Weise) mit Hilfe der Tabelle IV tun und erhält für

$$\mathrm{T\,IV}_{4^1/_2}^{n} = \frac{30\,000}{6000} = 5.$$

Diesen Wert findet man jedoch in der Tabelle IV unter dem Zinsfuße $4^1/_2$% nicht verzeichnet, wohl aber

4·389 . . . beim Termin 5 und 5·157 . . . beim Termin 6.

Daraus folgt, daß die Annuität von 6000 K zu klein ist, um das Darlehen von 30.000 K in 5 Jahren zu tilgen, denn den Quotienten

4·389 . . . erhält man aus $\frac{30\,000}{6833{\cdot}75}$ (es wäre also zur Tilgung in 5 Jahren eine Annuität von 6833·75 erforderlich), anderseits ergibt sich aber, daß durch eine 6malige Entrichtung von 6000 K ein etwas größeres Kapital, nämlich 6000 . 5·15787248 = 30 947·24 K getilgt würde.

Da also $n \gtrless {5 \atop 6}$, wird der Schuldner 5mal die Annuität von 6000 K, im 6. Jahre aber einen kleineren Betrag zu zahlen haben.

Wäre der der Kapitalstilgung zugrunde liegende Zinsfuß nicht in der Tabelle enthalten, dann müßte n aus der (ebenfalls auf S. 51 angegebenen) Formel

$$n = log \frac{a}{a - K \, . \, i} : log \, r$$

berechnet werden. Dieselbe läßt sich noch etwas vereinfachen, wenn man die Annuität in Prozenten der Darlehenssumme ausdrückt (in dem in Rede stehenden Beispiel beträgt die Annuität 20% des Darlehens). Bezeichnen wir diesen Prozentsatz, der natürlich stets größer sein muß als der in Frage kommende Zinsfuß, mit α, dann ist

$$a = K \, . \, \frac{\alpha}{100};$$

diesen Wert in die vorstehende Gleichung eingesetzt, ergibt für

$$n = log \frac{K \frac{\alpha}{100}}{K \frac{\alpha}{100} - K \, . \, \frac{p}{100}} : log \, r = log \frac{\alpha}{\alpha - p} : log \, r$$

und schließlich

$$n = \frac{log \, \alpha - log \, (\alpha - p)}{log \, r} = \frac{log \, 20 - log \, 15{\cdot}5}{log \, 1{\cdot}045} = 5{\cdot}7909.$$

Das letzte Ergebnis besagt, daß das Anlehen von 30 000 K durch 5·7909malige Entrichtung der Annuität von 6000 K getilgt werden könnte, was natürlich praktisch undurchführbar ist. Wird aber unter dem Resultate nicht die Anzahl der Annuitäten (diese kann nie eine gebrochene Zahl sein), sondern die Tilgungsdauer verstanden, dann hat es wohl einen Sinn, dieselbe mit 5·7909 Jahren zu fixieren.

Da man von einer Annuitätentilgung nur innerhalb ganzer Termine sprechen kann, hängt es lediglich von der Vereinbarung ab, wann der für den Jahresbruchteil verbleibende Schuldrest abzustatten ist. Nachdem der Fall der Entrichtung am Schlusse des nächsten ganzen Jahres bereits besprochen wurde, wollen wir nunmehr annehmen, daß die Schlußrate am Ende der rechnungsmäßigen Amortisationsdauer (also am 285. Tage des 6. Jahres) beglichen werde.

In diesem Falle wird der Schuldner natürlich nicht die ganzjährigen, sondern die Zinsen für 0·7909 Jahre, sohin

$$4561{\cdot}20 \, . \, 1{\cdot}045^{0{\cdot}7909} - 4561{\cdot}20 = 161{\cdot}58 \; K$$

zu zahlen haben.

Die Folge davon ist, daß sich auch R entsprechend (in R') ändert, denn nachdem nunmehr der letzte Zahlungstermin verschoben ist, werden die Leistungen des Schuldners darzustellen sein durch

$$30\,000 = 6000 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdot\cdot + \frac{1}{r^5}\right) + \frac{R'}{r^{5{\cdot}7909}},$$

woraus sich für

$$R' = 1{\cdot}045^{5{\cdot}7909} \, . \, 3660{\cdot}14 = 4722{\cdot}78$$

ergibt.

Unter dieser Voraussetzung wird sich der Tilgungsplan vom 5. Jahre an folgendermaßen darstellen:

Datum	4½% Zinsen		Tilgungsquote		Schuldrest	
	K	h	K	h	K	h
.	.	.	.	.	.	.
1. Juni 1924 . .	454	79	5545	21	4561	20
15. März 1925 . .	161	58	4561	20	—	—
	R' (Zinsen + Tilgungsquote)					

Würden für die letzten 285 Tage nur *einfache* Zinsen gerechnet, so hätte der Schuldner an solchen

$$45{\cdot}612 \, . \, 4{\cdot}5 \, . \, 0{\cdot}7909 = 162{\cdot}34,$$

sohin insgesamt im letzten Jahre

$$R'' = 4723{\cdot}54 \; K \text{ zu bezahlen.}$$

§ 22.

Tilgungsplan mit gegebener gebrochener Amortisationsdauer.

Mittels Konzessionsurkunde vom 7. Dezember 1901 wurde der Aktiengesellschaft . . . . die Ermächtigung erteilt, zum Bau der Lokalbahn J — T . . ein Anlehen von 2,928.400 K aufzunehmen und für dessen 4%ige Verzinsung und Tilgung für die Zeit von der Betriebseröffnung bis zum Ablaufe des 76. Jahres der Konzessionsdauer die Staatsgarantie gewährt, so zwar, daß, wenn das jährliche Reinerträgnis den garantierten Betrag nicht erreichen sollte, das Fehlende von der Staatsverwaltung zu ergänzen ist.

Der von der Staatsverwaltung infolge der übernommenen Garantie eventuell zu zahlende Betrag ist lediglich als ein verzinslicher Vorschuß zu behandeln. Wenn der Reinertrag der Bahn die garantierte Jahressumme überschreitet, so ist der diesfällige Überschuß sogleich zur Zurückzahlung des geleisteten Vorschusses samt Zinsen an die Staatsverwaltung bis zur gänzlichen Tilgung abzuführen.

Das Anlehen wurde am 24. April 1903 gegen die Verpflichtung begeben, dasselbe gegen eine 2%ige Semesterverzinsung vom 30. Juni 1904 angefangen mittels gleich großer, an jedem 30. Juni und 31. Dezember fälligen Annuitäten und einer am 6. Dezember 1977 zu entrichtenden Schlußrate zurückzuzahlen. Überdies ist jeweils am 1. Jänner für ein Jahr im vorhinein $\frac{1}{8}$% Regie vom jeweiligen Schuldrest zu entrichten.

Um für dieses Anlehen den Tilgungsplan aufstellen zu können, muß zunächst die Amortisationsdauer ermittelt werden. Dieselbe beginnt, da die erste Annuität am 30. Juni 1904 entrichtet wird, am 1. Jänner 1904 und endet am 6. Dezember 1977, umfaßt also $147\frac{156}{180} = 147\frac{13}{15}$ Semester. Bringen wir — wie es in der Regel geschieht — für den Bruchteil des 148. Semesters *einfache* Zinsen in Anrechnung und setzen die Schlußrate proportional der Zeit, also

$$R : a = \frac{13}{15} : 1, \text{ so daß } R = \frac{13}{15} a, \text{ dann ist}$$

$$K = a\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{50}} + \frac{1}{r^{50}}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{50}}\right) + \frac{1}{r^{50}} \cdot \frac{1}{r^{50}}\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{47}}\right)\right] + \frac{1}{r^{50}} \cdot \frac{1}{r^{50}} \cdot \frac{1}{r^{47}} \cdot c,$$

worin (die durch $\frac{13}{15}$ Termine bei 2% einfachen Zinsen diskontierte Schlußrate)

$$c = \frac{100\,R}{100 + 2 \cdot \frac{13}{15}} = \frac{\frac{13}{15} a}{1 + 0{\cdot}02 \cdot \frac{13}{15}} = 0{\cdot}8519\, a.$$

Demnach ist

$$K = a\Bigg\{\underbrace{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{50}}}_{31{\cdot}42360589} + \frac{1}{r^{50}}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{50}}}_{31{\cdot}42360589} +$$
$$+ \frac{1}{r^{50}}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{47}}}_{30{\cdot}28658196} + \frac{0{\cdot}8519}{r^{47}}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}, \text{ beziehungsweise}$$

$$2\,928\,400 = 47{\cdot}32526\, a \quad \text{und} \quad a = 61\,878{\cdot}16, \text{ sohin}$$

$$R = \frac{13}{15} a = 53\,627{\cdot}74.$$

Will man auch noch ermitteln, wieviel von dem Restgliede R auf Zinsen und wieviel auf Kapitalstilgung entfällt, dann braucht

man nur zu erwägen, daß im letzten Halbjahr der Schuldrest des vorletzten Semesters und überdies die Zinsen dieses Schuldrestes bis zum Zeitpunkte seiner Rückzahlung zu begleichen sind.

Demnach ist

$$R = S_{147} + S_{147} \cdot \frac{2 \cdot \frac{13}{15}}{100}, \text{ beziehungsweise } 53627{\cdot}74 = S_{147}\left(1 + \frac{26}{1500}\right) \text{ und}$$

$$S_{147} = 52714{\cdot}03.$$

Von dem Restgliede werden somit 52 714·03 K zur Tilgung und 913·71 K zur Zinsenzahlung verwendet.

Bei der Aufstellung des Tilgungsplanes wird nunmehr nur noch darauf zu achten sein, daß die Rückzahlung des am 24. April 1903 aufgenommenen Darlehens erst im Jahre 1904 beginnt.

Am 1. Zahlungstermin (30. Juni 1903) sind für 67 Tage die 4%igen Zinsen (21 800·31) und der Regiebeitrag

$$\left(2\,928\,400 \cdot \frac{1}{800} \cdot \frac{67}{360} = 681{\cdot}26\right)$$

fällig; überdies ist noch der auf diese Beträge entfallende Quittungsstempel nach Skala II (72·50) zu entrichten.

Auf diese dem Staate zu leistende Gebühr wird, da dieselbe mit dem eigentlichen Gang der Rechnung nicht zusammenhängt und in der Regel einen konstanten Betrag ausmacht, ebenso wie in den früheren Aufgaben auch bei den folgenden Beispielen keinerlei Rücksicht genommen.

Die Gesamtleistung beläuft sich demnach auf 22 554·07. Am 31. Dezember 1903 sind die halbjährigen Zinsen und der Regiebeitrag für die Zeit vom 1. Juli 1903 bis 31. Dezember 1904 (weil Vorhineinzahlung bedungen), sowie die entsprechende Stempelgebühr zu zahlen. Die dritte Rate besteht aus der 1. Annuität, wovon 58 568·— auf Zinsen und 3 310·16 auf Kapitalstilgung entfallen, und dem Stempel; ein Regiebeitrag ist diesmal nicht zu entrichten, da derselbe ganzjährig zu leisten ist.

Es wird keinerlei Schwierigkeiten bereiten, den Tilgungsplan in der angegebenen Weise fortzusetzen. Wir wollen daher von der weiteren Entwicklung absehen und unmittelbar die einzelnen Werte der 20. Rate bestimmen. Die betreffende (18.) Tilgungsquote erhält man aus

$$t_1 \cdot 1{\cdot}02^{17} = 3310{\cdot}16 \cdot 1{\cdot}40024142 = 4635{\cdot}02,$$

so daß auf Zinsen 57 243·14 entfallen.

Der Schuldrest beläuft sich auf

$$S = K - (t_1 + t_2 + \cdots + t_{18}) = 2{,}857.521{\cdot}83$$

und der Regiebeitrag dementsprechend auf 3 571·90.

Der Tilgungsplan stellt sich also folgendermaßen dar:

Rate	Zahlungs-termin	4% Zinsen (2% pro Semester)		Tilgung		Stand der Kapitalsschuld		Regiebeitrag		Stempel		Gesamterfordernis	
		K	*h*	*K*	*h*	*K*	*h*	*K*	*h*	*K*	*h*	*K*	*h*
1	30. Juni 1903	21.800	31	.	.	2,928.400	—	681	26	72	50	22.554	07
2	31. Dez. 1903	58.568	—	.	.	2,928.400	—	5.490	75	202	50	64.261	25
3	30. Juni 1904	58.568	—	3.310	16	2,925.089	84	.	.	195	—	62.073	16
4	31. Dez. 1904	58.501	80	3.376	36	2,921.713	48	3.652	14	205	—	65.735	30
5	30. Juni 1905	58 434	27	3.443	89	2,918.269	59	.	.	195	—	62.073	16
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	31. Dez. 1912	57.243	14	4.635	02	2,857.521	83	3.571	90	205	—	65.655	06
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

§ 23.

In Obligationen zerlegtes Anlehen.

Häufig kommt es vor, daß das Anlehen in eine gewisse Anzahl von mit fortlaufenden Nummern versehenen *Schuldverschreibungen (Obligationen)* zerlegt ist und die Tilgung in der Art erfolgt, daß immer zu bestimmten Verlosungsterminen eine Anzahl dieser Obligationen, sei es nun zum Nominalwert oder mit einem anderen Betrag eingelöst wird, die noch nicht gezogenen Stücke aber bis zur Einlösung entsprechend verzinst werden.

Zunächst wollen wir den Fall *einer Verlosung zum Nominalwerte* ins Auge fassen.

Ist das Anlehen K in Z Obligationen à N Kronen zerlegt, so werden, wenn man die Anzahl der in den einzelnen Jahren eingelösten Schuldverschreibungen mit O_1, O_2, O_3, ... O_n bezeichnet, von der Annuität des ersten Jahres $K\frac{p}{100}$ als Zinsen und für die Kapitalstilgung $O_1 . N$ Verwendung finden. Im 2. Jahre sind an Zinsen nur mehr $(K - O_1 N)\frac{p}{100}$ zu entrichten, für die Tilgung verbleiben sohin $O_2 N$ usf.

Man kann also die Annuitäten der einzelnen Jahre in folgender Weise in ihre Bestandteile zerlegen:

Erfordernis der 1. Ziehung $a = K\frac{p}{100} + O_1 N$ . . . . 1)

" " 2. " $a = (K - O_1 N)\frac{p}{100} + O_2 N$ . . . . . . 2)

" " 3. " $a = (K - O_1 N - O_2 N)\frac{p}{100} + O_3 N$ . . 3)

" " 4. " $a = (K - O_1 N - O_2 N - O_3 N)\frac{p}{100} + O_4 N$ 4)

. . . .

Subtrahiert man nun jede folgende von der vorhergehenden Gleichung, so erhält man

$$0 = O_1 N\left(1 + \frac{p}{100}\right) - O_2 N \quad . . . . . . \alpha)$$

$$0 = O_2 N\left(1 + \frac{p}{100}\right) - O_3 N \quad . . . . . . \beta)$$

$$0 = O_3 N\left(1 + \frac{p}{100}\right) - O_4 N \quad . . . . . . \gamma)$$

Aus Gleichung $\alpha)$ folgt $O_2 = O_1 . r$

" " $\beta)$ " $O_3 = O_2 . r = O_1 . r^2$

" " $\gamma)$ " $O_4 = O_3 . r = O_1 . r^3$

und bei fortgesetzter Entwicklung

$$O_n = O_{n-1} . r = O_1 . r^{n-1}.$$

Es ergibt sich also die Anzahl der in irgend einem, z. B. dem k^{ten} Jahre, einzulösenden Obligationen aus der unmittelbar vorangehenden durch einfache Aufzinsung und aus der im ersten Jahre eingelösten Stückzahl, wenn man diese mit r^{k-1} multipliziert.

Für $Z = O_1 + O_2 + O_3 + \cdots + O_n$ kann man nun schreiben

$$= O_1 + O_1 . r + O_1 r^2 + \cdots + O_1 \; r^{n-1}$$

$$= O_1 [1 + \mathrm{T\,III}_p^{n-1}], \text{ so daß}$$

$$O_1 = \frac{Z}{1 + \mathrm{T\,III}_p^{n-1}}.$$

Ein Anlehen von 200 000 K, geteilt in 1000 Obligationen à 200 K, soll bei 4%iger Verzinsung durch 8 immer am Jahresschlusse stattfindende Verlosungen mittels Annuitäten getilgt werden.

Nach der vorstehenden Formel wird sich die Anzahl der in den einzelnen Jahren einzulösenden Obligationen darstellen als

$$O_1 = \frac{1000}{1 + \mathrm{T\,III}_4^7} = \frac{1000}{9{\cdot}21422626} = 108{\cdot}53\ (108{\cdot}5278)$$

$$O_2 = O_1 . r = 108{\cdot}5278 . 1{\cdot}04 \quad = 112{\cdot}87$$

$$O_3 = O_1\, r^2 = 108{\cdot}5278 . 1{\cdot}0816 \quad = 117{\cdot}38$$

$O_4 =$ . . . . $= 122{\cdot}08$

$O_5 =$ . . . . $= 126{\cdot}96$

$O_6 =$ . . . . $= 132{\cdot}04$

$O_7 =$ . . . . $= 137{\cdot}32$

$O_8 =$ . . . . $= 142{\cdot}82$

1000·—

Nachdem es praktisch unmöglich ist, Bruchteile von Obligationen einzulösen, müssen die rechnungsmäßigen Werte auf ganze Stücke entsprechend abgerundet werden, so daß sich der folgende Tilgungsplan ergibt:

Ziehung (Jahr)	4% Zinsen		Einzulös. Obligationen	Kapitalstilgung		Schuldrest		Jährliches Erfordernis	
	K	h		K	h	K	h	K	h
1	8000	—	109	21.800	—	178.200	—	29.800	—
2	7128	—	113	22.600	—	155.600	—	29.728	—
3	6224	—	117	23.400	—	132.200	—	29.624	—
4	5288	—	122	24.400	—	107.800	—	29.688	—
5	4312	—	127	25.400	—	82.400	—	29.712	—
6	3296	—	132	26.400	—	56.000	—	29.696	—
7	2240	—	137	27.400	—	28.600	—	29.640	—
8	1144	—	143	28.600	—	.	.	29.744	—
			1000	200.000	—				

Das jährliche, für Verzinsung und Kapitalstilgung nötige Erfordernis ist, wie man sieht, nicht, wie bei den früheren Tilgungsplänen gleich groß, sondern schwankt zwischen 29.624 und 29.800 K. Der Grund hiefür liegt in dem Umstande, anstatt der *rechnungsmäßigen* Anzahl von Obligationen nur *ganze* Stücke einlösen zu können.

Der Tilgungsplan kann aber auch derart aufgestellt werden, daß man anstatt der einzulösenden Obligationen die Annuität ermittelt, so daß sich die ersteren dann von selbst aus dem Gang der Rechnung ergeben. Da die Teilung des Anlehens in Schuldverschreibungen auf die zu dessen Tilgung, beziehungsweise Verzinsung erforderliche rechnungsmäßige Annuität ohne Einfluß sein muß (man kann sich das Anlehen in auf Heller lautende Obligationen zerlegt denken), wird sich die letztere wieder nach der Formel bestimmen

$$a = \frac{K}{\mathrm{TIV}_p^{(n)}} = \frac{200\,000}{6{\cdot}73274487} = 29\,705\,566\,K.$$

Von der Annuität des 1. Jahres werden 8 000 K an Zinsen benötigt und der Rest pro 21 705·57 K ist zur Tilgung verfügbar; mit diesem Betrage können 108 Schuldverschreibungen à 200 K eingelöst werden, so daß, da hiefür nur 21 600 K erforderlich sind, 105·57 K keine Verwendung finden und am Schlusse des 1. Jahres ein um diesen Betrag größerer Schuldrest verbleibt, als wenn die ganze Annuität verbraucht worden wäre. Nachdem aber der Schuldrest mit 4% zu verzinsen ist, müßten die Zinsen für die 105·57 K von der Annuität des 2. Jahres bestritten werden. Um jedoch diese nicht unrechtmäßig zu kürzen, denkt man sich den im 1. Jahre übrig gebliebenen Rest während des 2. Jahres nicht mehr im Besitze des Schuldners, sondern auf 4% Zinsen angelegt. Am Schlusse des Jahres

wird dieser Rest samt den Zinsen zu der 2. Annuität hinzugegeben, so daß im 2. Jahre nicht nur die rechnungsmäßige Annuität von 29 705·566, sondern auch noch jener Betrag zur Verfügung steht, welcher zur Verzinsung und Tilgung (4·22 + 105·57) des Restes aus dem Vorjahre erforderlich ist. Von dem Gesamtbetrage pro 29 815·35 werden im 2. Jahre 7 136 K an Zinsen verbraucht (178 400 . 0·04) und 22 679·35 zur Tilgung verfügbar sein; damit können 113 Obligationen eingelöst werden, so daß ein nicht verwendeter Rest von 79·35 verbleibt, der zuzüglich der 4%igen Zinsen (3·17) und der rechnungsmäßigen Annuität einen Gesamtbetrag von 29 788·09 ergibt, welcher zur Verzinsung und Tilgung im 3. Jahre zur Verfügung steht.

Der Tilgungsplan wird sich dann folgendermaßen darstellen:

Ziehung (Jahr)	4% Zinsen		Zur Tilgung verfügbar		Einzulös. Obligationen	Kapitalstilgung		Schuldrest		Nicht verbrauchter Rest		4% des Restes		Annuität + verzinster Rest	
	K	h	K	h		K	h	K	h	K	h	K	h	K	h
1	8.000	—	21.705	57	108	21.600	—	178.400	—	105	57	4	22	29.815	35
2	7.136	—	22 679	35	113	22.600	—	155.800	—	79	35	3	17	29.788	09
3	6.232	—	23.556	09	117	23.400	—	132.400	—	156	09	6	24	29.867	89
4	5.296	—	24.571	89	122	24.400	—	108.000	—	171	89	6	88	29.884	34
5	4.320	—	25.564	34	127	25.400	—	82.600	—	164	34	6	57	29.876	48
6	3.304	—	26.572	48	132	26.400	—	56.200	—	172	48	6	90	29.884	95
7	2.248	—	27.636	95	138	27.600	—	28.600	—	36	95	1	48	29.744	—
8	1.144	—	28.600	—	143	28.600	—	.	.	.	.	.	.	.	.
					1000	2 00.000	—								

Ein Vergleich beider Darstellungen zeigt, daß nach der ersteren im 1. Jahre um 1 Obligation mehr, dafür aber bei der 7. Ziehung um 1 Stück weniger als nach der 2. Darstellung zur Einlösung gelangt. Der für die Praxis ja belanglose Unterschied ist darin begründet, daß das rechnungsmäßige $O_1 = 108{\cdot}53$ auf 109 abgerundet und daher gleich im 1. Jahre ein um 94·43 K größerer Betrag als die Annuität in Anspruch genommen wurde.

In analoger Weise hätte man vorzugehen, wenn beispielsweise ein in Obligationen zerlegtes *(Prioritäts)*-Anlehen in einer gebrochenen Amortisationsdauer zu tilgen wäre.

Man würde sich zunächst auf die auf S. 60 besprochene Art die rechnungsmäßige Annuität und hieraus die 1. Tilgungsquote bestimmen; aus dieser sodann (mittels Division durch den Nominalbetrag N) den Wert O_1 (auf genügend viele Dezimalstellen) und hieraus nach der Formel

$$O_k = O_1 \cdot r^{k-1}$$

die Werte O_2, O_3, ... bis O_{n-1} und O_n dadurch ermitteln, daß man in gleicher Weise wie im § 22 das Restglied sowie den von diesem auf Kapitalstilgung entfallenden Teil berechnet und den letzteren durch N dividiert. Hat man sich noch davon überzeugt, daß die Summe der rechnungsmäßigen O_1, O_2, . . . O_n die Gesamtzahl aller emittierten Obligationen ergibt, wird man diese Werte schließlich auf Ganze abrunden.

§ 24.

Tilgungsplan bei ganzjähriger Ziehung und halbjähriger Verzinsung.

Welche Änderung erfährt der im vorstehenden Paragraph aufgestellte Tilgungsplan, wenn die Einlösung der Obligationen ganzjährig, die Verzinsung aber halbjährig zu 2% erfolgt?

Zerlegt man sich auch hier das jährliche Erfordernis in den zur Zinszahlung und den für die Einlösung der Schuldverschreibungen erforderlichen Betrag, so hat man darauf zu achten, daß diese Zahlungen zu verschiedenen Terminen zu leisten, aber auf denselben Zeitpunkt zu diskontieren sind. Bezieht man die an den ungeraden Semestern (1, 3, 5 . . .) fälligen Zinszahlungen auf den Zeitpunkt der ein Semester später stattfindenden Ziehung, so werden sich die einzelnen Jahreserfordernisse folgendermaßen darstellen:

im 1. Jahr:

$$a = K \cdot \frac{p}{200}^{*)}\left(1 + \frac{p}{200}\right) + K\frac{p}{200}^{**)} + O_1 N$$

$$= K\left[\frac{p}{100} + \left(\frac{p}{200}\right)^2\right] + O_1 N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 1)$$

im 2. Jahr:

$$a = (K - O_1 N)\frac{p}{200}\left(1 + \frac{p}{200}\right) + (K - O_1 N)\frac{p}{200} + O_2 N$$

$$= (K - O_1 N)\left[\frac{p}{100} + \left(\frac{p}{200}\right)^2\right] + O_2 N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 2)$$

im 3. Jahr:

$$a = (K - O_1 N - O_2 N)\frac{p}{200}\left(1 + \frac{p}{200}\right) + (K - O_1 N - O_2 N)\frac{p}{200} + O_3 N$$

$$= (K - O_1 N - O_2 N)\left[\frac{p}{100} + \left(\frac{p}{200}\right)^2\right] + O_3 N \quad \ldots\ldots\ldots \; 3)$$

. . . .

*) $\frac{p}{2}$ bedeutet den Semesterzinsfuß, $K\frac{p}{200}$ sohin die Zinsen für das erste Semester, welche noch durch ein Semester zu verzinsen sind, da wir annehmen, daß die Zinsen des 1. erst am Schlusse des 2. Semesters (bei der Ziehung) ausbezahlt werden.

**) Zinsen für das 2. Semester.

Setzt man $\frac{p}{100} + \left(\frac{p}{200}\right)^2 = i''$ und subtrahiert die 2. von der 1. und die 3. von der 2. Gleichung, dann folgt

$$0 = O_1 N + O_1 N . i'' - O_2 N \quad \ldots\ldots\ldots \; \alpha)$$
$$0 = O_2 N + O_2 N . i'' - O_3 N \quad \ldots\ldots\ldots \; \beta)$$

und aus α) . . . $O_2 = O_1 (1 + i'')$

„ „ β) . . . $O_3 = O_2 (1 + i'') = O_1 (1 + i'')^2$,

sohin, wenn $1 + i'' = \alpha$,

$$Z = O_1 (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^7) \text{ und schließlich}$$

$$O_1 = Z\frac{\alpha - 1}{\alpha^8 - 1} = 1000\frac{0{\cdot}0404}{1{\cdot}0404^8 - 1} = 108{\cdot}374.$$

Es zeigt sich also in der Anzahl der im 1. Jahre zur Einlösung gelangenden Obligationen gegenüber dem früheren Werte (108·528) eine kleine Abweichung, welche sich natürlich auch auf die folgenden Werte O_2, O_3 usf. übertragen wird. Der Grund dafür liegt darin, daß jetzt anstatt mit $r = 1{\cdot}04$ mit $\alpha = 1 + 0{\cdot}04 + 0{\cdot}0004 = 1{\cdot}0404$, also mit dem einer 2%igen Semesterverzinsung entsprechenden konformen Jahreszinsfuß (siehe S. 17) zu rechnen ist.

Die für den praktischen Gebrauch abgerundeten Werte der O_1, O_2, . . . stimmen jedoch mit dem auf S. 65 aufgestellten Tilgungsplan völlig überein, so daß die halbjährige Verzinsung im Gegensatze zur ganzjährigen für den Besitzer der Obligationen wohl einen kleinen Vorteil bedeutet (weil er nicht 4, sondern tatsächlich 4·04% Zinsen erhält), im Tilgungsplan selbst aber so gut wie gar keine Änderung herbeiführt.

§ 25.

Obligationenanlehen mit verschiedenen Appoints.

Ein Anlehen von 1,300.000 K ist in 600 Obligationen à 1000 K und 1400 Obligationen à 500 K geteilt und soll bei $3^1/_2$%iger Verzinsung durch 10 jeweils am Jahresschlusse sattfindende Ziehungen bei Einlösung der Obligationen zum Nennwerte getilgt werden.

Da vorausgesetzt wird, daß die Schuldverschreibungen beider Appoints gleichzeitig und nicht zuerst die der einen und dann erst jene der anderen Gruppe zur Einlösung gelangen, so kann man sich die Aufgabe aus zwei Tilgungsplänen der im § 23 besprochenen Art zusammengesetzt denken.

Bezeichnen wir die Anzahl der in den einzelnen Ziehungen zu amortisierenden Obligationen der ersten Kategorie mit o_1, o_2, ... o_{10} und jene der 2. Gruppe mit O_1, O_2, ... O_{10}, so erhält man

$$600 = o_1 \left[1 + \mathrm{T\,III}^{9}_{3^1/_2}\right], \text{ beziehungsweise } 1400 = O_1 \left[1 + \mathrm{T\,III}^{9}_{3^1/_2}\right]$$

und

$$o_1 = \frac{600}{11 \cdot 73139316} = 51 \cdot 1448,$$

beziehungsweise

$$O_1 = \frac{1400}{11 \cdot 73139316} = 119 \cdot 3379.$$

Nach der Formel $O_n = O_1 \,.\, r^{n-1}$ ergeben sich dann die folgenden Werte:

$$
\begin{array}{ll}
o_1 = 51 \cdot 14 & O_1 = 119 \cdot 34 \\
o_2 = 52 \cdot 94 & O_2 = 123 \cdot 51 \\
o_3 = 54 \cdot 79 & O_3 = 127 \cdot 84 \\
o_4 = 56 \cdot 70 & O_4 = 132 \cdot 31 \\
o_5 = 58 \cdot 69 & O_5 = 136 \cdot 94 \\
o_6 = 60 \cdot 74 & O_6 = 141 \cdot 74 \\
o_7 = 62 \cdot 87 & O_7 = 146 \cdot 70 \\
o_8 = 65 \cdot 07 & O_8 = 151 \cdot 83 \\
o_9 = 67 \cdot 35 & O_9 = 157 \cdot 14 \\
o_{10} = 69 \cdot 71 & O_{10} = 162 \cdot 65
\end{array}
$$

Das bei der Emittierung des Anlehens zwischen der Anzahl der Obligationen beider Appoints bestehende Verhältnis $\frac{1400}{600} = 2 \cdot \dot{3}$ ist auch bei den einzelnen Ziehungen aufrecht erhalten.

Die vorstehenden rechnungsmäßigen Werte sind nun entsprechend abzurunden, so daß sich der folgende Tilgungsplan ergibt:

Ziehung (Jahr)	3½% Zinsen		Einzulösende Obligationen		Kapitalstilgung		Schuldrest		Jährliches Erfordernis	
	K	h	à 1000 K	à 500 K	K	h	K	h	K	h
1	45 500	—	51	119	110 500	—	1,189 500	—	156 000	—
2	41 632	50	53	123	114 500	—	1,075 000	—	156 132	50
3	37 625	—	55	128	119 000	—	956 000	—	156 625	—
4	33 460	—	57	132	123 000	—	833 000	—	156 460	—
5	29 155	—	59	137	127 500	—	705 500	—	156 655	—
6	24 692	50	61	142	132 000	—	573 500	—	156 692	50
7	20 072	50	63	147	136 500	—	437 000	—	156 572	50
8	15 295	—	65	152	141 000	—	296 000	—	156 295	—
9	10 360	—	67	157	145 500	—	150 500	—	155 860	—
0	5 267	50	69	163	150 500	—	—	—	155 767	50
			600	1.400	1,300.000	—				

Ermitteln wir noch die rechnungsmäßige Annuität

$$a = \frac{K}{\text{T IV}_{3^1/_2}^{10}} = \frac{1\,300\,000}{8 \cdot 31660532} = 156\,313 \cdot 78,$$

so sehen wir, daß die Differenz zwischen dieser und dem kleinsten, beziehungsweise größten jährlichen Erfordernis 546, beziehungsweise 379 K ausmacht.

§ 26.

Einlösung der Obligationen zu einem anderen als dem Nennwerte.

Werden die Schuldverschreibungen nicht zum Nennwerte N, sondern mit dem größeren oder kleineren Betrage E eingelöst, so beträgt, wenn die frühere Bezeichnungsweise aufrecht bleibt, das Erfordernis am Schlusse

des 1. Jahres $a = K \frac{p}{100} + O_1 \,.\, E$ . . . . 1)

„ 2. „ $a = (K - O_1 N) \frac{p}{100} + O_2 E$ . . . . 2)

„ 3. „ $a = (K - O_1 N - O_2 N) \frac{p}{100} + O_3 E$ . . . . 3)

. . . .

des $(n-1)^{\text{ten}}$ Jahres $a = (K - O_1 N - O_2 N - \ldots$

$- O_{n-2} N) \frac{p}{100} + O_{n-1} \,.\, E$ . . . . . $n-1)$

des n^{ten} Jahres $a = (K - O_1 N - O_2 N - \ldots$

$- O_{n-1} N) \frac{p}{100} + O_n \,.\, E$ . . . . $n)$

Subtrahiert man wieder jede folgende von der früheren Gleichung, so erhält man

$$0 = O_1 \,.\, E + O_1 N \frac{p}{100} - O_2 E \quad \ldots\ldots\ldots \quad a)$$

beziehungsweise

$$0 = O_2 E + O_2 N \frac{p}{100} - O_3 E \quad \ldots\ldots\ldots \quad b)$$

. . . .

$$0 = O_{n-1} E + O_{n-1} N \frac{p}{100} - O_n E \quad \ldots\ldots \quad m)$$

Aus Gleichung $a)$ folgt nun

$$O_2 = O_1 \left(1 + \frac{N p}{E\, 100}\right),$$

aus Gleichung $b)$

$$O_3 = O_2 \left(1 + \frac{N p}{E\, 100}\right) = O_1 \left(1 + \frac{N}{E} \cdot \frac{p}{100}\right)^2,$$

. . . .

und aus Gleichung $m)$

$$O_n = O_{n-1} \left(1 + \frac{N}{E} \cdot \frac{p}{100}\right) = O_1 \left(1 + \frac{N}{E} \cdot \frac{p}{100}\right)^{n-1}.$$

Bezeichnen wir den Ausdruck

$$1 + \frac{N}{E} \cdot \frac{p}{100} \text{ mit } \alpha,$$

so resultiert schließlich $O_2 = O_1 \,.\, \alpha$

$$O_3 = O_1 \,.\, \alpha^2 \text{ oder allgemein}$$

$$O_n = O_1 \,.\, \alpha^{n-1}$$

O_1 läßt sich wieder aus der Gleichung bestimmen:

$$Z = O_1 + O_2 + O_3 + \cdots + O_n = O_1 (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots \alpha^{n-1}) = O_1 \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$$

und ergibt sich als

$$O_1 = Z \,.\, \frac{\alpha - 1}{\alpha^n - 1}.$$

Ein in 2000 Obligationen à 200 K geteiltes Anlehen von 400.000 K soll bei 3%iger Verzinsung durch 6 jeweils am Jahresschlusse stattfindende Ziehungen derart getilgt werden, daß jede Schuldverschreibung mit 210 K eingelöst wird.

Für diesen Fall ist

$$\alpha = 1 + \frac{200}{210} \cdot \frac{3}{100} = 1\cdot0285714,$$

sohin

$$O_1 = 2000 \cdot \frac{0\cdot0285714}{1\cdot0285714^6 - 1} = \frac{57\cdot1428}{0\cdot184149} = 310\cdot308;$$

hieraus ergibt sich

$$O_1 = 310\cdot31 = 310$$
$$O_2 = 319\cdot17 = 319$$
$$O_3 = 328\cdot29 = 328$$
$$O_4 = 337\cdot67 = 338$$
$$O_5 = 347\cdot32 = 348$$
$$O_6 = 357\cdot24 = 357$$

Der Tilgungsplan wird sich wie folgt darstellen:

Ziehung	3% Zinsen (6 K pro Oblig.)		Einzulösende Obligat.	Zur Tilgung erforderlich		Jährliches Erfordernis		Noch einzulösende Obligat.
	K	h		K	h	K	h	
1	12.000	—	310	65.100	—	77.100	—	1.690
2	10.140	—	319	66.990	—	77.130	—	1.371
3	8.226	—	328	68.880	—	77.106	—	1.043
4	6.258	—	338	70.980	—	77.238	—	705
5	4.230	—	348	73.080	—	77.310	—	357
6	2.142	—	357	74.970	—	77.112	—	—
			2·000	420.000	—			

Da jede Obligation zu einem um 5% höheren Betrag als dem Nennwerte eingelöst wird, muß natürlich auch die Summe aller Tilgungsquoten um 5% größer als das Anlehen, sohin 420.000 K sein.

Wollte man auch hier die Annuität bestimmen — trotzdem dieselbe für die Aufstellung des Tilgungsplanes nicht benötigt wird — so könnte man dies zunächst etwa mit Hilfe der Gleichung 1) tun; es ergibt sich dann:

$$a = 400\,000 \,.\, 0\cdot03 + 310\cdot308 \,.\, 210 = 77\,164\cdot68 \; K.$$

Man gelangt aber zu demselben Resultat auch durch folgende Erwägung: Es ist gleichgiltig, ob ein Anlehen von 400.000 K in 6 Jahren zu 3% verzinst und mit 420·000 K eingelöst oder aber ein Anlehen von 420 000 K in 6 Jahren zu $2^6/_7\%$*) verzinst und zum Nennwerte eingelöst wird. Hiefür besteht die Gleichung

$$420\,000 = a \left(\frac{1}{1\cdot02857\ldots} + \frac{1}{1\cdot02857\ldots^2} + \cdots + \frac{1}{1\cdot02857\ldots^6} \right)$$

und hieraus folgt ebenfalls $a = 77\,164\cdot68 \; K$.

§ 27.

Tilgung mittels steigender (fallender) Annuitäten.

Es soll nun der Fall erörtert werden, daß die vom Schuldner in den einzelnen Terminen zu leistenden Zahlungen nicht, wie bisher, gleich groß ($= a$) sind, sondern stetig um einen bestimmten Betrag zu-, beziehungsweise abnehmen, sohin eine *arithmetische Reihe* von der Form bilden

$$a, \; a + \delta,^{**)} \; a + 2\,\delta, \text{ usf.}$$

Setzen wir die Barwerte der Leistungen von Gläubiger und Schuldner einander gleich, so folgt

$$K = \frac{a}{r} + \frac{a + \delta}{r^2} + \frac{a + 2\,\delta}{r^3} + \cdots + \frac{a + (n-1)\,\delta}{r^n}$$

$$= a \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n} \right) + \frac{\delta}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \cdots + \frac{n-1}{r^{n-1}} \right)$$

Der Wert des 2. Klammerausdruckes wurde bereits auf Seite 40 ermittelt; sohin ergibt sich

$$K = a \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n} \right) + \frac{\delta}{r} \cdot \frac{1}{r^{n-1}\,(r-1)} \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} - n \right)$$

$$= a \,.\, \mathrm{T\,IV}_p^{(n} + \frac{\delta}{r^n\,(r-1)} (r^n \,.\, \mathrm{T\,IV}_p^{(n} - n) = a \,.\, \mathrm{T\,IV}_p^{(n} + \frac{100\,\delta}{p} \left[\mathrm{T\,IV}_p^{(n} - \frac{n}{r^n} \right]$$

$$\text{und } a = \left[K - \frac{100\,\delta}{p} \left(\mathrm{T\,IV}_p^{(n} - \frac{n}{r^n} \right) \right] : \mathrm{T\,IV}_p^{(n}.$$

*) x K Zinsen | geben 100 K,
wenn 210 K | 6 K Zinsen liefern?
$x = 2^6/_7$.

**) Bei abnehmenden Zahlungen ist anstatt δ natürlich $-\delta$ zu setzen.

Für $\delta = 0$ geht diese Gleichung über in $a = \frac{K}{\text{T IV}_p^{(n}}$.

Ist die erste Zahlung (a) gegeben und muß die jeweilige Zins-, beziehungsweise Abnahme (δ) berechnet werden, dann erhält man dafür

$$\delta = \frac{p\,(K - a\,\text{T IV}_p^{(n})}{100 \,.\left(\text{T IV}_p^{(n} - \frac{n}{r^n}\right)}$$

Ein Anlehen von 50 000 K ist bei 4%iger dek. Verzinsung in 5 Jahren derart zu tilgen, daß die erstjährige Zahlung 6 000 K beträgt. Es ist also $K = 50\,000$, $a = 6\,000$, $p = 4$, $n = 5$ und

$$\delta = \frac{4\,(50\,000 - 6\,000 \,.\, 4{\cdot}45182233)}{100\,(4{\cdot}45182233 - 5 \,.\, 0{\cdot}82192711)} = 2\,722{\cdot}38.$$

Der Tilgungsplan lautet demnach:

Jahr	Gesamterfordernis		4% Zinsen		Tilgung		Schuldrest	
	K	h	K	h	K	h	K	h
1	6.000	—	2.000	—	4.000	—	46.000	—
2	8.722	38	1.840	—	6.882	38	39.117	62
3	11.444	76	1.564	70	9.880	06	29.237	56
4	14.167	14	1.169	50	12.997	64	16.239	92
5	16.889	52	649	60	16.239	92	—	—
					50.000	—		

Ein Anleihen von 300 000 K soll bei 2%iger Semesterverzinsung durch 40 Halbjahresraten, deren jede folgende um 300 K kleiner ist als die vorhergehende, getilgt werden. Wie groß ist die erste Zahlung?

Dieselbe wird sich aus der Gleichung bestimmen lassen:

$$a = \left[300\,000 - \frac{100 \,.\, (-300)}{2}\,(27{\cdot}35547924 - 40 \,.\, 0{\cdot}45289042)\right] : 27{\cdot}35547924 = 16\,033{\cdot}28.$$

Die im letzten Semester zu leistende Zahlung wird sich nunmehr mit Hilfe der das n^{te} Glied einer arithmetischen Reihe (mit der Differenz δ) darstellenden Formel

$$a_n = a_1 + (n-1)\,\delta \text{ ergeben als}$$
$$a_{40} = 16\,033{\cdot}28 - 300 \,.\, 39 = 4333{\cdot}28.$$

Wäre jetzt für dieses Beispiel etwa der Tilgungsplan hinsichtlich der letzten 5 Semester aufzustellen, so wird man sich nur den Schuldrest am Schlusse des 35. Semesters und die 36. Zahlung ermitteln brauchen, alle übrigen Daten ergeben sich von selbst.

Stellen wir den Schuldrest als Barwert aller noch ausstehenden Leistungen des Schuldners dar, so ist

$$S_{35} = \frac{a_{36}}{r} + \frac{a_{36} + \delta}{r^2} + \frac{a_{36} + 2\,\delta}{r^3} + \frac{a_{36} + 3\,\delta}{r^4} + \frac{a_{36} + 4\,\delta}{r^5}$$
$$= a_{36}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^5}\right) + \frac{\delta}{r}\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \frac{4}{r^4}\right).$$

Diese Gleichung ist ganz analog gebildet wie die auf S. 71 und läßt sich daher folgendermaßen schreiben:

$$S_{35} = a_{36} \,.\, \text{T IV}_2^{(5} + \frac{100\,\delta}{2}\left(\text{T IV}_2^{(5} - \frac{5}{1{\cdot}02^5}\right).$$

Nun ist $a_{36} = 16\,033{\cdot}28 - 300 \,.\, 35 = 5533{\cdot}28$, sohin $S_{35} = 23\,308{\cdot}80$, demnach der Tilgungsplan:

Semester	Gesamterfordernis		2% Zinsen		Tilgung		Schuldrest	
	K	h	K	h	K	h	K	h
.	.	.	.	.	.	.	.	.
35	.	.	.	.	.	.	23 308	80
36	5.533	28	466	18	5.067	10	18.241	70
37	5.233	28	364	83	4.868	45	13.373	25
38	4.933	28	267	47	4.665	81	8.707	44
39	4.633	28	174	15	4.459	13	4.248	31
40	4.333	28	84	97	4.248	31	—	—

Es ist unschwer einzusehen, daß δ keineswegs ganz beliebig gewählt werden darf. Die Grundgleichung für a auf S. 71 kann man — auf den vorliegenden Fall angewendet — auch schreiben:

$$a = \frac{300\,000}{\text{T IV}_2^{40}} + \frac{\left[\text{T IV}_2^{40} - \frac{40}{1{\cdot}02^{40}}\right]\frac{100}{2}\,\delta}{\text{T IV}_2^{(40}}$$
$$a = 10\,966{\cdot}724 + 16{\cdot}88851\,\delta.$$

Setzt man anderseits die im letzten Jahre noch zu leistende Zahlung mit mindestens 1 K fest, so ist für $-\delta$

$$a_{40} = 1 = a - 39\,\delta, \text{ beziehungsweise}$$
$$a = 1 + 39\,\delta.$$

Aus diesen beiden Gleichungen resultiert nun der Maximalwert

$$\delta = 495{\cdot}9288,$$

d. h. der Betrag, um welchen die Jahreszahlungen des Schuldners abnehmen dürfen, darf bei dem vorstehenden Beispiel sich auf höchstens 495·93 K belaufen.

Unter diese Gruppe von Aufgaben gehört auch der auf S. 49 dargestellte Fall der Kapitalsrückzahlung mittels gleich großer Tilgungsquoten.

§ 28.

Kapitalstilgung mittels Vorhinein-Annuitäten.

Würde bedungen, daß das Schuldkapital durch gleich große, jedoch stets *im vorhinein* zu entrichtende Annuitäten zu tilgen ist, dann wäre die Leistung und Gegenleistung darstellende Gleichung

$$K = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \cdots + \frac{a}{r^{n-1}} = a\left[1 + \mathrm{T\,IV}_p^{(n-1)}\right]$$

und

$$a = \frac{K}{1 + \mathrm{T\,IV}_p^{(n-1)}}$$

Es ist der Tilgungsplan für die Rückzahlung eines Kapitales von 100.000 K durch 6 gleich große, jährliche Vorhinein-Annuitäten bei 4%iger dekursiver Verzinsung aufzustellen.

$$a = \frac{100\,000}{5{\cdot}45182233} = 18\,342{\cdot}49.$$

Jahr	4% Zinsen		Tilgungsquote		Schuldrest	
	zu Anfang des nebenstehenden Jahres					
	K	*h*	*K*	*h*	*K*	*h*
1	—	—	18 342	49	81.657	51
2	3.266	30	15 076	19	66.581	32
3	2 663	25	15.679	24	50 902	08
4	2.036	08	16.306	41	34.595	67
5	1 383	83	16.958	66	17.637	01
6	705	48	17 637	01	—	—
			100.000	—		

Da zu Anfang des 1. Jahres noch keinerlei Zinsen fällig werden, kann die ganze Annuität in diesem Jahre zur Kapitalstilgung, keineswegs aber als erste Tilgungsquote in der Formel $t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$ verwendet werden; der regelmäßige Verlauf der Amortisationsquoten beginnt, wie zu sehen, erst vom 2. Jahre an.

Vergleiche diese Darstellung mit dem analogen Tilgungsplan für Nachhinein-Annuitäten auf S. 53.

Eine weitere Besprechung dieses Falles kann unterbleiben, da sich derselbe auch in die Rückzahlung eines Kapitales von 81 657·51 K durch 5 Nachhinein-Annuitäten $\left(a = \frac{81\,657{\cdot}51}{4{\cdot}45182233} = 18\,342{\cdot}49\right)$ überführen läßt $\left(K - a = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \cdots + \frac{a}{r^{n-1}}\right)$.

b) Bei antizipativer Verzinsung.

§ 29.

Kapitalstilgung durch gleich große Nachhinein-Annuitäten.

Darlehen auf Realitäten oder Grundstücke, also sogenannte *Hypothekardarlehen*, werden zumeist gegen antizipative Verzinsung gewährt. Wenn hiebei die Rückzahlung der Schuld durch gleich große *Nachhinein-Annuitäten* zu erfolgen hat, so erwächst dem Schuldner die Verpflichtung, gleich bei Empfang des Kapitales die Zinsen für den ersten Termin zu bezahlen und überdies am Schlusse des ersten und jedes folgenden Termines, insgesamt n mal, die Annuität a zu entrichten.

Die Leistungen von Gläubiger und Schuldner werden sich demnach, wenn π den Zinsfuß pro Termin bedeutet, durch die Gleichung darstellen

$$K = K \cdot \frac{\pi}{100} + \frac{a}{\varrho} + \frac{a}{\varrho^2} + \ldots\ldots + \frac{a}{\varrho^n}.$$

Hieraus ergibt sich

$$K\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) = \frac{a}{\varrho}\left(1 + \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \ldots + \frac{1}{\varrho^{n-1}}\right) \text{ oder}$$

$$K \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{a}{\varrho}\left[1 + \mathrm{T\,IV}_\pi^{(n-1)}\right] \text{ und } a = \frac{K}{1 + \mathrm{T\,IV}_\pi^{(n-1)}}.$$

Zur Bestimmung der einzelnen Tilgungsquoten führt die folgende Überlegung: Die erste Annuität wird am Schlusse des ersten Termines entrichtet und besteht aus der Tilgungsquote t_1 und den Vorhineinzinsen von dem in diesem Zeitpunkte und während des ganzen zweiten Termines schuldigen Kapitalsbetrage $K - t_1$. Von der 2. Annuität wird in gleicher Weise der Betrag t_2 zur Tilgung verwendet — hiedurch reduziert sich die Schuld auf $K - t_1 - t_2$ — und der Rest zur Verzinsung dieses Schuldrestes benötigt. Es wird demnach die Leistung des Schuldners betragen am Schlusse

des 1. Termines $a = t_1 + (K - t_1)\frac{\pi}{100}$

„ 2. „ $a = t_2 + (K - t_1 - t_2)\frac{\pi}{100}$

„ 3. „ $a = t_3 + (K - t_1 - t_2 - t_3)\frac{\pi}{100}$ usf.

Durch Subtraktion der einzelnen Gleichungen erhält man

$$0 = t_1 - t_2 + t_2 \frac{\pi}{100} \quad \text{oder} \quad t_2 = \frac{t_1}{1 - \frac{\pi}{100}} = t_1 \cdot \varrho$$

$$0 = t_2 - t_3 + t_3 \frac{\pi}{100} \quad \text{„} \quad t_3 = \frac{t_2}{1 - \frac{\pi}{100}} = t_2 \cdot \varrho = t_1 \cdot \varrho^2$$

oder allgemein $t_n = t_{n-1} \cdot \varrho = t_1 \cdot \varrho^{n-1}$.

Nun ist $K = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$

$$= t_1 + t_1 \varrho + t_1 \varrho^2 + \ldots + t_1 \cdot \varrho^{n-1} = t_1 \left[1 + \mathrm{T\,III}_{\pi}^{(n-1}\right],$$

so daß $t_1 = \dfrac{K}{1 + \mathrm{T\,III}_{\pi}^{(n-1}}$.

Ein am 1. Juli 1920 aufgenommenes Hypothekardarlehen von 75.000 K soll bei 4%iger antizipativer Verzinsung durch 9 gleich große Jahres-Annuitäten getilgt werden, deren erste am 1. Juli 1921 fällig ist. Wie lautet der Tilgungsplan?

Um denselben aufstellen zu können, benötigt man zunächst die Tilgungsquote des 1. Jahres; diese ist

$$t_1 = \frac{75\,000}{1 + \mathrm{T\,III}_4^{(8}} = \frac{75\,000}{10{\cdot}65533843} = 7038{\cdot}7253.$$

Aus diesem Werte lassen sich dann durch einfache Multiplikation mit ϱ die folgenden Tilgungsquoten berechnen. Für die Kontrolle wird es sich empfehlen, auch die Annuität zu ermitteln, denn die Tilgungsquote irgend eines Jahres und die für das nächste Jahr vorausbezahlten Zinsen müssen zusammen die Annuität geben.

$$a = \frac{75\,000}{1 + \mathrm{T\,IV}_4^{(8}} = \frac{75\,000}{7{\cdot}6866501} = 9757{\cdot}177.$$

Die Zinsen für das 1. Jahr im Betrage von 3000 K müssen am Anfange desselben gezahlt werden. Durch Entrichtung der ersten Annuität (am Schlusse des 1. Jahres) werden 7038·73 K $(= t_1)$ zurückgezahlt, so daß für das 2. Jahr nur mehr die 4%igen Vorhinein-Zinsen von 67 961·27 K, das sind 2718·45 K zu zahlen sind; dieser Betrag vermehrt um t_1 ist die Annuität des 1. Jahres. Mit der 2. Annuität werden 7332·01 K getilgt, so daß nur mehr 60 629·26 K zu verzinsen bleiben; usf.

Der Grund, weshalb im letzten Jahre eine um 4 h geringere als in den Vorjahren entrichtete Annuität zur Tilgung des letzten Schuldrestes ausreichen würde, liegt darin, daß die rechnungsmäßige Annuität nicht, wie durchwegs angenommen wurde, 9757·18, sondern 9757·177 K beträgt.

Datum	4% Zinsen		Tilgungsquote		Schuldrest	
	K	h	K	h	K	h
1. Juli 1920	3000	—	—	—	75.000	—
1. „ 1921	2718	45	7 038	73	67.961	27
1. „ 1922	2425	17	7 332	01	60.629	26
1. „ 1923	2119	67	7.637	51	52 991	75
1. „ 1924	1801	44	7.955	74	45.036	01
1. „ 1925	1469	95	8.[illegible]87	23	36.748	78
1. „ 1926	1124	65	8.632	53	28.116	25
1. „ 1927	764	96	8.992	22	19.124	03
1. „ 1928	390	29	9.366	89	9.757	14
1. „ 1929	—	—	9.757	14 (04)	—	—
			75.000	— (04)		

Der Schuldrest irgend eines Jahres läßt sich — ebenso wie bei der dekursiven Verzinsung — z. B. entweder als Differenz zwischen dem ursprünglichen Kapitale und den bisher gezahlten Tilgungsquoten oder als Barwert der noch ausstehenden Zahlungen des Schuldners darstellen. Es ist also beispielsweise

$$S_5 = K - (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = K - t_1 \left[1 + \mathrm{T\,III}_{\pi}^{(4}\right]$$

oder auch

$$S_5 = S_5 \cdot \frac{\pi}{100} + \frac{a}{\varrho} + \frac{a}{\varrho^2} + \frac{a}{\varrho^3} + \frac{a}{\varrho^4};$$

hieraus ergibt sich

$$S_5 \left(1 - \frac{\pi}{100}\right) = \frac{a}{\varrho} \cdot \left(1 + \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^3}\right)$$

und schließlich

$$S_5 = a\left[1 + \mathrm{T\,IV}_4^{(3}\right] = 36\,748{\cdot}807.$$

Die geringfügige Differenz zwischen diesem Resultat und dem im Tilgungsplan enthaltenen Schuldrest ist ebenfalls auf die durch den praktischen Gebrauch bedingte Abrundung der rechnungsmäßigen Annuität zurückzuführen.

§ 30.

Tilgungsplan mit gegebener runder Annuität.

Es ist der Tilgungsplan für ein am 1. April 1920 aufgenommenes und durch gleich große Jahresannuitäten à 25.000 K zu amortisierendes Darlehen von 100.000 K bei $3\frac{1}{2}$%iger antizipativer Verzinsung aufzustellen.

Die Tilgungsquote des 1. Jahres ergibt sich aus der Gleichung

$$a = t_1 + (K - t_1)\frac{\pi}{100} = t_1\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) + K\frac{\pi}{100} = \frac{t_1}{\varrho} + K\frac{\pi}{100}$$

mit

$$t_1 = \left(a - \frac{K.\pi}{100}\right)\varrho.^{*)}$$

Die gegebenen Werte eingesetzt, erhält man

$$t_1 = (25\,000 - 3500)\cdot 1{\cdot}03626943 = 22\,279{\cdot}793.$$

Nunmehr ist es ein Leichtes, die folgenden Tilgungsquoten zu ermitteln und den Plan aufzustellen.

Datum	3½% Zinsen		Tilgungsquote		Schuldrest	
	K	h	K	h	K	h
1. April 1920	3500	—	—	—	100.000	—
1. „ 1921	2720	21	22.279	79	77.720	21
1. „ 1922	1912	13	23.087	87	54.632	34
1. „ 1923	1074	75	23.925	25	30.707	09
1. „ 1924	206	99	24.793	01	5.914	08
1. „ 1925	—	—	5.914	08	—	—
			100.000	—		

Für die Ermittlung des Schuldrestes können verschiedene Methoden in Betracht kommen; zunächst die bisher zumeist verwendete Art der Bestimmung der Differenz zwischen Darlehenssumme und den bereits gezahlten Tilgungsquoten:

$$S_k = K - t_1(1 + \varrho + \varrho^2 + \cdots + \varrho^{k-1}).$$

Wird in diese Gleichung der für t_1 oben abgeleitete Wert eingesetzt, so erhält man

$$S_k = K - \left(a - \frac{K.\pi}{100}\right)(\varrho + \varrho^2 + \cdots + \varrho^k)$$

$$= K - \left(a - \frac{K.\pi}{100}\right).\mathrm{T\,III}_{\pi}^{(k}.$$

Diese Formel wird sich besonders dann sehr praktisch verwenden lassen, wenn, wie es häufig vorkommt, der Klammerausdruck einen abgerundeten Betrag darstellt (im vorliegenden Beispiel 21 500).

Der Schuldrest läßt sich aber auch ebenso wie bei der dekursiven Verzinsung (siehe die Ableitung S. 48 und 49) aus den bisher gezahlten Annuitäten berechnen. Es ist nämlich

*) Unter Benützung dieser Formel läßt sich irgendeine Tilgungsquote auch berechnen als $t_n = \left(a - \frac{K.\pi}{100}\right).\varrho^n$.

$$S_1 = K + S_1\frac{\pi}{100}{}^{*)} - a, \text{ somit}$$

$$S_1\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) = K - a \text{ und}$$

$$S_1 = (K - a)\varrho$$

$$S_2 = S_1 + S_2\frac{\pi}{100} - a$$

$$S_2\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) = S_1 - a$$

$$S_2 = (S_1 - a)\varrho = [(K - a)\varrho - a]\varrho$$

$$= K\varrho^2 - a\varrho^2 - a\varrho, \text{ somit allgemein}$$

$$^{**)}\; S_k = K\varrho^k - a\varrho^k - a\varrho^{k-1} - a\varrho^{k-2} - \ldots - a\varrho$$

$$= K\varrho^k - a\,\mathrm{T\,III}_{\pi}^{k}.$$

Die Schlußrate R, also jener Betrag, welcher am Ende des letzten Jahres zu entrichten ist, bestimmt sich aus der Gleichung

$$K = K\frac{\pi}{100} + \frac{a}{\varrho} + \frac{a}{\varrho^2} + \frac{a}{\varrho^3} + \frac{a}{\varrho^4} + \frac{R}{\varrho^5}$$

beziehungsweise

$$96\,500 = 25\,000.\mathrm{T\,IV}_{3\cdot5}^{(4} + \frac{R}{1{\cdot}19498769},$$

mit

$$R = 5914{\cdot}08.$$

Die Bestimmung der Schlußrate hat zur Voraussetzung, daß man den Zeitpunkt ihrer Entrichtung kennt; infolge dessen muß man — wenn nicht, wie im vorstehenden Beispiele, schon der Tilgungsplan vorliegt und man denselben nur auf seine Richtigkeit prüfen will — vorerst die Amortisationsdauer bestimmen. Unter der Annahme, daß auch im letzten Jahre die Annuität a gezahlt wird, ist

$$K = a[1 + \mathrm{T\,IV}_{\pi}^{(n-1}] \text{ oder}$$

$$\mathrm{T\,IV}_{\pi}^{(n-1} = \frac{K}{a} - 1;$$

setzt man in diese Gleichung die gegebenen Werte ein, so erhält man

$$\mathrm{T\,IV}_{3\cdot5}^{(n-1} = 4 - 1 = 3.$$

*) Die Zinsen sind bei Entstehen des 1. Schuldrestes von diesem (für den 2. Termin) und nicht etwa wieder von K zu entrichten.

**) Unrichtig wäre es natürlich, den Schuldrest etwa folgendermaßen berechnen zu wollen:

$$S_k = K\varrho^k - K\frac{\pi}{100}\varrho^k - a\varrho^{k-1} - a\varrho^{k-2} - \ldots - a; \text{ denn}$$

S_1 ist z. B. nicht: $\quad K\varrho - K\frac{\pi}{100}\varrho - \underline{a},$

sondern $\quad K\varrho - K\frac{\pi}{100}\varrho - \underline{t_1}$

$$= K\varrho\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) - t_1 = K - t_1.$$

Dieser Wert ist zwar in Tabelle $IV_{3\cdot5}$ nicht verzeichnet — sohin ist das n keine ganze, sondern eine Dezimalzahl — wohl aber

2·794 ... beim Termin 3
und 3·662 ... „ „ 4.

Demnach liegt $n-1$ zwischen 3 und 4
und n „ 4 „ 5,

d. h. 5 Zahlungen à 25 000 K sind zur Amortisation nicht erforderlich, aber durch 4 solche Zahlungen ist das Darlehen noch nicht getilgt; sohin wird man 4 Annuitäten à 25 000 K und eine kleinere Schlußrate zu entrichten haben.

Handelt es sich um einen Zinsfuß, welcher in der Tabelle nicht verzeichnet ist, dann muß n aus der Gleichung berechnet werden:

$$K = a + \frac{a}{\varrho} + \frac{a}{\varrho^2} + \cdots + \frac{a}{\varrho^{n-1}}$$

$$= a\frac{\varrho^n - 1}{\varrho^{n-1}(\varrho - 1)} = a\frac{\varrho(\varrho^n - 1)}{\varrho^n(\varrho - 1)} = a\left(1 - \frac{1}{\varrho^n}\right)\frac{\varrho}{\varrho - 1}.$$

Hieraus ergibt sich $\varrho^n = \dfrac{a\varrho}{a\varrho - K(\varrho - 1)}$,

und da sich die Annuität in Prozenten des Darlehens ausdrücken läßt $\left(a = K\cdot\frac{\alpha}{100}\right)$,

$$\varrho^n = \frac{K\frac{\alpha}{100}\cdot\varrho}{K\frac{\alpha}{100}\varrho - K(\varrho - 1)} = \frac{\frac{\alpha}{100-\pi}}{\frac{\alpha}{100-\pi} - \varrho + 1}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha + \left(1 - \frac{100}{100-\pi}\right)(100 - \pi)} = \frac{\alpha}{\alpha - \pi},$$

und schließlich

$$n = \frac{\log\alpha - \log(\alpha - \pi)}{\log\varrho}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von der auf S. 58 abgeleiteten nur dadurch, daß anstatt der dekursiven die antizipative Verzinsung zum Ausdrucke gelangt.

Für die vorstehende Aufgabe ist

$$n = \frac{\log 25 - \log 21\cdot5}{\log 1\cdot03626943} = 4\cdot23.$$

§ 31.

In Obligationen geteiltes Anlehen; Einlösung zum Nennwerte.

Ist das Anlehen K in Z Obligationen à N Kronen geteilt, so werden, wenn die Anzahl der in den einzelnen Jahren gezogenen

Schuldverschreibungen $O_1, O_2, O_3 \ldots O_n$ ist und die Einlösung derselben zum Nennwerte erfolgt, die nachstehenden Gleichungen bestehen:

$$a = O_1 N + (K - O_1 N)\frac{\pi}{100}$$

$$a = O_2 N + (K - O_1 N - O_2 N)\frac{\pi}{100}$$

$$a = O_3 N + (K - O_1 N - O_2 N - O_3 N)\frac{\pi}{100} \quad \text{usf.}$$

Subtrahiert man wieder die Gleichungen voneinander, so erhält man

$$0 = O_1 N - O_2 N + O_2 N\frac{\pi}{100} = O_1 - O_2\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) \quad \ldots \alpha)$$

$$0 = O_2 N - O_3 N + O_3 N\frac{\pi}{100} = O_2 - O_3\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) \quad \ldots \beta)$$

Aus α) folgt ... $O_2 = \dfrac{O_1}{\frac{100-\pi}{100}} = O_1 \cdot \varrho$

„ β) „ ... $O_3 = \dfrac{O_2}{\frac{100-\pi}{\pi}} = O_2 \cdot \varrho = O_1 \cdot \varrho^2$,

sohin allgemein $O_n = O_{n-1} \cdot \varrho = O_1 \cdot \varrho^{n-1}$.

Nun ist $O_1 + O_2 + O_3 + \cdots + O_n = Z$, folglich auch

$$Z = O_1(1 + \varrho + \varrho^2 + \cdots + \varrho^{n-1}) \text{ und } O_1 = \frac{Z}{1 + \mathrm{T\,III}_{\pi}^{(n-1}}.$$

Ein in 2000 Obligationen à 500 K zerlegtes, am 1. Mai 1920 emittiertes Anlehen von 1,000.000 K soll durch 7 jeweils am 1. Mai stattfindende Ziehungen vom Jahre 1921 an bei $3^1/_2$%iger Verzinsung p. a. und Einlösung der Schuldverschreibungen zum Nominalwert getilgt werden.

$$O_1 = \frac{Z}{1 + \mathrm{T\,III}^{(6}_{3^1/_2}} = \frac{2000}{7\cdot80940623} = 256\cdot1014.$$

Hieraus erhält man sukzessive

$O_1 = 256\cdot10$ und abgerundet 256
$O_2 = 265\cdot39$ „ „ 265
$O_3 = 275\cdot01$ „ „ 275
$O_4 = 284\cdot99$ „ „ 285
$O_5 = 295\cdot33$ „ „ 296
$O_6 = 306\cdot04$ „ „ 306
$O_7 = 317\cdot14$ „ „ 317

Bringt man gleichzeitig die Verwendung des von der rechnungsmäßigen Annuität per

$$a = \frac{1{,}000\,000}{6{\cdot}30640552} = 158\,568{\cdot}934\ K$$

in den einzelnen Ziehungen nicht verbrauchten Restes zur Darstellung, wobei hervorzuhebeu ist, daß dieser Betrag mit $3^1/_2\%$ *antizipativ* verzinst werden muß, so ergibt sich folgender Tilgungsplan:

Datum	Eingelöste Obligationen	Tilgung K	Tilgung h	Aufrechte Obligationen	17·5 K Zinsen pro aufrechtes Stück K	h	Gesamterfordernis K	h	Von der verfügbaren Annuität nicht verbraucht K	h	Aufgezinster Rest K	h	Verfügbar im nächsten Jahre K	h
1. Mai 1920	—	—	—	2000	35.000	—	35.000	—	—	—	—	—	158.568	93
1. Mai 1921 (1. Ziehung)	256	128.000	—	1744	30.520	—	158.520	—	48	93	50	70	158.619	63
1. Mai 1922 (2. Ziehung)	265	132.500	—	1479	25.882	50	158.382	50	237	13	245	73	158.814	66
1. Mai 1923 (3. Ziehung)	275	137.500	—	1204	21.070	—	158.570	—	244	66	253	53	158.822	46
1. Mai 1924 (4. Ziehung)	285	142.500	—	919	16.082	50	158.582	50	239	96	248	66	158.817	59
1. Mai 1925 (5. Ziehung)	296	148.000	—	623	10.902	50	158.902	50	— 84	91	— 87	99	158.480	94
1. Mai 1926 (6. Ziehung)	306	153.000	—	317	5.547	50	158.547	50	— 66	56	— 68	97	158.499	96
1. Mai 1927 (7. Ziehung)	317	158.500	—	—	—	—	158.500	—					Differenz	04
	2000	1,000.000	—						für den Tilgungsplan nicht unbedingt erforderlich.					

Die geringfügige Differenz von 4 *h* rührt daher, daß von der rechnungsmäßigen Annuität 0·4 *h* konsequent vernachlässigt wurden.

§ 32.

Einlösung der Obligationen zu einem anderen als dem Nennwerte.

Sind die Obligationen nicht mit dem Nennwerte N, sondern mit einem anderen Betrage E einzulösen, dann wird sich das Erfordernis der einzelnen Jahre folgendermaßen darstellen:

im 1. Jahre $a = O_1 E + (K - O_1 N)\frac{\pi}{100}$

„ 2. „ $a = O_2 E + (K - O_1 N - O_2 N)\frac{\pi}{100}$

„ 3. „ $a = O_3 E + (K - O_1 N - O_2 N - O_3 N)\frac{\pi}{100}$ usf.

Durch Subtraktion der einzelnen Gleichungen erhält man

$$0 = O_1 E - O_2 E + O_2 N \frac{\pi}{100} = O_1 - O_2\left(1 - \frac{N}{E}\cdot\frac{\pi}{100}\right)^{*)} \quad \ldots 1)$$

$$0 = O_2 E - O_3 E + O_3 N \frac{\pi}{100} = O_2 - O_3\left(1 - \frac{N}{E}\cdot\frac{\pi}{100}\right) \quad \ldots 2)$$

*) Vergl. S. 69.

Aus Gleichung 1) folgt $O_2 = \dfrac{O_1}{1 - \frac{N}{E}\cdot\frac{\pi}{100}} = O_1 \dfrac{100}{100 - \pi\frac{N}{E}}$

„ „ 2) „ $O_3 = \dfrac{O_2}{1 - \frac{N}{E}\cdot\frac{\pi}{100}} = O_2 \cdot \dfrac{100}{100 - \pi\frac{N}{E}}$

Setzt man nun den Ausdruck

$$\frac{100}{100 - \pi\cdot\frac{N}{E}} = \beta,$$

so ergibt sich schließlich

$$O_2 = O_1\,.\,\beta, \quad O_3 = O_2\,.\,\beta = O_1\,.\,\beta^2, \text{ oder allgemein}$$
$$O_n = O_{n-1}\,.\,\beta = O_1\,.\,\beta^{n-1}.$$

O_1 folgt aus der Gleichung

$$Z = O_1 + O_2 + \cdots + O_n = O_1(1 + \beta + \cdots + \beta^{n-1}) = O_1\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}$$

mit

$$O_1 = Z\,.\,\frac{\beta - 1}{\beta^n - 1}.$$

Für $E = N$ wird $\beta = \dfrac{100}{100 - \pi} = \varrho$ und es würde wieder der im vorhergehenden Paragraph besprochene Fall vorliegen.

Nach den vorstehenden Erläuterungen wird es nicht schwer sein, ein konkretes Beispiel durchzurechnen, weshalb hier davon Umgang genommen wird.

§ 33.

Kapitalstilgung mittels Vorhinein-Annuitäten.

In welcher Weise ändert sich der im § 29 zur Darstellung gebrachte Tilgungsplan, wenn die Annuitäten nicht im nachhinein, sondern *im vorhinein* entrichtet werden?

In diesem Falle sind die Zinsen für das laufende Jahr stets in der Annuität desselben Jahres enthalten; es sind daher auch im 1. Jahre außer der Annuität keinerlei Zinsen zu entrichten, so daß

$$K = a + \frac{a}{\varrho} + \frac{a}{\varrho^2} + \cdots + \frac{a}{\varrho^{n-1}} = a\left(1 + \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \cdots + \frac{1}{\varrho^{n-1}}\right)$$

und

$$a = \frac{K}{1 + \mathrm{T\,IV}_{\pi}^{n-1}}.$$

Diese Formel ist mit der auf S. 75 abgeleiteten vollkommen identisch, so daß es für die Größe der Annuität ganz irrelevant ist.

ob dieselbe im vorhinein oder im nachhinein entrichtet wird. Darum erfährt auch der Tilgungsplan nur insoferne eine Änderung, als die Zinszahlung des 1. Jahres per 3000 K entfällt und alle übrigen Ziffern um eine Zeile nach aufwärts verschoben werden, denn die erste Annuität ist am 1. Juli 1920 und die letzte am 1. Juli 1928 fällig.

c) Lotterieanlehen.

§ 34.

Lossperrgesetz.

Das Gesetz vom 28. März 1889 (sogenanntes *Lossperrgesetz*) bestimmt im § 1: „*Schuldverschreibungen mit Prämien*, in welchen allen Gläubigern oder einem Teile derselben außer der Zahlung der verschriebenen Geldsumme eine Prämie dergestalt zugesichert wird, daß durch Auslosung oder durch eine andere Art der Ermittlung die zu prämiierenden Schuldverschreibungen und die Höhe der ihnen zufallenden Prämien bestimmt werden sollen, dürfen nur auf Grund eines Gesetzes und nur zu Zwecken des Staates ausgegeben werden".

Mit dieser gesetzlichen Bestimmung ist einerseits die Definition von *Lotterie- oder Prämien-Anlehen* gegeben und anderseits normiert, daß die Ausgabe von solchen Anlehen privaten Unternehmungen seit mehr als 30 Jahren gänzlich untersagt ist; aber auch der Staat hat in der Zwischenzeit von dem sich vorbehaltenen Rechte keinen Gebrauch gemacht und kein derartiges Anlehen begeben. — Wenn nun auch mit Rücksicht darauf die Zahl der gegenwärtig noch im Verkehr befindlichen Lose alljährlich rapid abnimmt, so ist eine — wenn auch möglichst kurz gefaßte — Darstellung der bei der Begebung solcher Anlehen in Betracht kommenden rechnerischen Probleme doch unerläßlich.

Vorerst sei noch auf den Unterschied zwischen den in den §§ 26 und 32 besprochenen Kapitalstilgungen einerseits und den Lotterieanlehen anderseits verwiesen. Während bei den ersteren der größere Einlösungsbetrag *(Amortisationszuschlag)* jeder Schuldverschreibung zugute kommt, entfällt bei den Prämienanlehen nur auf einzelne Lose ein „*Treffer*", wogegen die übrigen nur mit dem Nennwert oder einem unwesentlich höheren Betrag *(„kleinste Treffer")* eingelöst werden.

Je nachdem die Lose bis zu ihrer Ziehung Zinsen tragen oder nicht, unterscheidet man *verzinsliche* und *unverzinsliche* Lotterieanlehen. Zunächst sei von den letzteren die Rede.

§ 35.

Unverzinsliche Lotterieanlehen.

Ein Anlehen von K Kronen wäre in Z Lose à N Kronen geteilt und durch n Ziehungen derart zu tilgen, daß aus der jährlichen Annuität a eine engbegrenzte, gleichbleibende Anzahl von Losen (L) mit größeren Treffern dotiert, die übrigen Lose aber mit Beträgen eingelöst werden, welche den Nominalwert entweder gar nicht oder nur unwesentlich übersteigen.

Bezeichnen wir die in den einzelnen Ziehungen auf die L größeren Treffer entfallenden Summen mit $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$, die Zahl der übrigen jeweils gezogenen Lose mit $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ und die Beträge, mit welchen jedes derselben eingelöst wird, mit $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$, dann ist das Erfordernis

der 1. Ziehung $a = T_1 + l_1 t_1$
„ 2. „ $a = T_2 + l_2 t_2$
„ 3. „ $a = T_3 + l_3 t_3$
. . . .
„ n^{ten} „ $a = T_n + l_n . t_n$.

Nehmen wir nun an, daß die auf die größeren Treffer entfallenden Beträge in Form einer arithmetischen Progression ansteigen, also

$$T_1 = T,\ T_2 = T + \delta,\ T_3 = T_2 + \delta = T + 2\,\delta \text{ usf.,}$$

dann gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$\begin{aligned} a &= T + l_1 t_1 \\ a &= T + \delta + l_2 t_2 \\ a &= T + 2\,\delta + l_3 t_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a &= T + (n-1)\,\delta + l_n . t_n \end{aligned}$$

und es ist

$$l_1 t_1 = \delta + l_2 t_2 = 2\,\delta + l_3 t_3 = \ldots = (n-1)\,\delta + l_n . t_n \text{ oder}$$

$$l_1 = \frac{l_1 t_1}{t_1},\quad l_2 = \frac{l_1 t_1}{t_2} - \frac{\delta}{t_2},\quad l_3 = \frac{l_1 t_1}{t_3} - \frac{2\,\delta}{t_3}$$

$$l_n = \frac{l_1 t_1}{t_n} - \frac{(n-1)\,\delta}{t_n}.$$

Da die Summe aller mit kleinsten Treffern gezogenen Lose

$$Z - n . L = z \text{ natürlich auch } z = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n$$

ist, so folgt nunmehr

$$z = l_1 t_1 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) - \delta \left(\frac{1}{t_2} + \frac{2}{t_3} + \cdots + \frac{n-1}{t_n}\right).$$

Weil aber

$$\frac{1}{t_2}+\frac{2}{t_3}+\cdots+\frac{n-1}{t_n}=\underbrace{\left(\frac{1}{t_1}+\frac{2}{t_2}+\frac{3}{t_3}+\cdots+\frac{n}{t_n}\right)}_{\alpha}-$$

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)}_{\beta},$$

so folgt

$$z=l_1\,t_1\,.\,\beta-\delta\,(\alpha-\beta)$$

und schließlich

$$l_1=\frac{z+\delta\,(\alpha-\beta)}{t_1\,.\,\beta}.$$

Spezialfälle:

1) Für $\delta=0$ ist

$$l_1=\frac{z}{t_1\,.\,\beta}=\frac{z}{t_1\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)}$$

2) Für $t_1=t_2=t_3=\cdots=t_n=t$ wird

$$\alpha=\frac{1}{t}+\frac{2}{t}+\frac{3}{t}+\cdots+\frac{n}{t}=\frac{(1+n)\,n}{2\,t}\quad\text{und}$$

$$\beta=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+\cdots+\frac{1}{t}=\frac{n}{t},\ \text{sohin}$$

$$l_1=\frac{z+\delta\,\frac{(1+n)\,n-2\,n}{2\,t}}{t\,.\,\frac{n}{t}}=\frac{z}{n}+\delta\,\frac{n-1}{2\,t}.$$

Ein aus 10.000 Losen à 200 K bestehendes Lotterieanlehen per 2,000.000 K soll durch 5 Ziehungen derart getilgt werden, daß bei jeder Ziehung für 8 größere Treffer ein Betrag von 33.000 K (und zwar 1 Treffer à 20 000, 2 à 4000 und 5 à 1000 K) verwendet und die übrigen Lose in der 1. Ziehung mit 200 K und in jeder folgenden mit einem um 6 K größeren Betrag als bei der vorhergehenden Ziehung eingelöst werden.

Es liegt der Spezialfall 1) vor und ist demnach

$$l_1=\frac{9960}{200\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{206}+\frac{1}{212}+\frac{1}{218}+\frac{1}{224}\right)}=2108{\cdot}13.$$

Die Anzahl der *Nieten*, das sind jene Lose, auf welche kein Treffer entfällt, in den folgenden Jahren ergibt sich mit

$$2108$$

$$l_2=\frac{l_1\,t_1}{t_2}=\frac{2108{\cdot}13\,.\,200}{206}=2046{\cdot}7\ \text{und abgerundet}\ 2047$$

$$l_3=\frac{l_1\,t_1}{t_3}=\frac{2108{\cdot}13\,.\,200}{212}=1988{\cdot}8\ \ „\ \ „\ \ 1989$$

$$l_4=\frac{421.626}{218}=1934{\cdot}1\ \ „\ \ „\ \ 1934$$

$$l_5=\frac{421.626}{224}=1882{\cdot}3\ \ „\ \ „\ \ 1882$$

Verlosungsplan:

Ziehung	Nieten: Anzahl	Nieten: Hiefür nötig K	Nieten: Hiefür nötig h	Gesamterfordernis (inkl. 33 000 K für größere Treffer) K	Gesamterfordernis h
1	2 108 à 200 K	421 600	—	454 600	—
2	2 047 „ 206 „	421 682	—	454 682	—
3	1 989 „ 212 „	421 668	—	454 668	—
4	1 934 „ 218 „	421 612	—	454 612	—
5	1 882 „ 224 „	421 568	—	454 568	—
	9 960 Nieten				
	+ 40 größere Treffer				
	10 000 Lose				

Will man sich darüber informieren, bei welcher Verzinsung durch ein gleich großes Jahreserfordernis das Kapital von 2 000 000 K in 5 Jahren getilgt werden könnte, so hat man, wenn Nachhinein-Annuitäten und dekursive Verzinsung in Betracht kämen, nur die Gleichung

$$K=a\,.\,\mathrm{T\,IV}_p^{(n}$$

nach p aufzulösen. Es ist

$$\mathrm{T\,IV}_p^{(5}=\frac{2\,000\,000}{454\,600\text{*)}}=4{\cdot}399.$$

Dieser Wert ist zwar in Tabelle IV nicht verzeichnet, kommt aber jenem von 4·3899 . . . sehr nahe, so daß die fragliche Verzinsung nicht ganz $4^1/_2\%$ betragen würde.

Wollte man beispielsweise nur eine 4%ige Verzinsung zugestehen, so würde sich eine Annuität auf $a=\frac{2\,000\,000}{4{\cdot}45182233}=449\,254\ K$ belaufen, so daß nach Abzug des Erfordernisses für die Nieten per . . . . 421 600 „
nur . . . . 27 654 K
für größere Treffer verfügbar wären.

*) Gesamterfordernis des 1. Jahres; jenes der folgenden Jahre differiert unwesentlich davon.

Nunmehr wollen wir die Bedingungen bezüglich der Tilgung des vorstehenden Anlehens dahin modifizieren, daß die auf die größeren Treffer entfallende Summe in der 1. Ziehung 35 000 K (1 Treffer à 20 000 K, 2 à 5000 und 5 à 1000 K) betrage und jährlich um 1000 K (zugunsten des größten Treffers) zunehme, alle übrigen Lose aber mit 210 K eingelöst werden.

Es ist dann $\delta = 1000$ und $t = 210$, demnach gemäß Spezialfall 2)

$$l_1 = \frac{9960}{5} + 1000 \cdot \frac{4}{420} = 2001{\cdot}524;$$

hieraus ergibt sich

$$l_2 = l_1 - \frac{\delta}{t} = 2001{\cdot}524 - 4{\cdot}762 = 1996{\cdot}762$$

$$l_3 = l_1 - \frac{2\,\delta}{t} = 1992{\cdot}000$$

$$l_4 = l_1 - \frac{3\,\delta}{t} = 1987{\cdot}238$$

$$l_5 = l_1 - \frac{4\,\delta}{t} = 1982{\cdot}476$$

und demgemäß der folgende Tilgungsplan:

Ziehung	Anzahl der Nieten	Erfordernis für die				Gesamterfordernis	
		Nieten		größeren Treffer			
		K	h	K	h	K	h
1	2 002	420 420	—	35 000	—	455 420	—
2	1 997	419 370	—	36 000	—	455 370	—
3	1 992	418 320	—	37 000	—	455 320	—
4	1 987	417 270	—	38 000	—	455 270	—
5	1 982	416 220	—	39 000	—	455 220	—
	9 960 Nieten						
	40 Treffer						
	10 000 Lose						

Untersuchen wir auch hier, welcher Verzinsung diese Kapitalstilgung entspricht, so ist zu ermitteln

$$\mathrm{T\,IV}_p^{5} = \frac{2\,000\,000}{455\,320^{*)}} = 4{\cdot}39$$

und dieser Wert entspricht fast genau einem Zinsfuß von $4^1/_2\%$.

*) Durchschnittliches jährliches Gesamterfordernis.

§ 36.

Verzinsliche Lotterieanlehen.

Ein in 25 000 Lose à 100 K geteiltes Anlehen von 2 500 000 K soll durch 8 jährliche Ziehungen derart getilgt werden, daß die Lose bis zu ihrer Ziehung mit 2% p. a. verzinst und alljährlich 43.000 K für die Dotierung von 5 Treffern (1 Treffer à 25 000 K, 1 à 15 000 und 3 à 1000 K) verwendet, die übrigen Lose aber zum Nominalbetrag eingelöst werden.

Die Aufgabe ist offenbar mit der bereits § 23 besprochenen Art der Kapitalsrückzahlung identisch, nur werden außer dem normalen rechnungsmäßigen Erfordernis noch alljährlich 43 000 K für Treffer benötigt.

Die Aufstellung des Tilgungsplanes wird daher keine Schwierigkeiten verursachen, wenn man vorerst die Anzahl der bei den einzelnen Ziehungen zur Tilgung gelangenden Lose bestimmt. Es ist

$$O_1 = \frac{Z}{1 + \mathrm{T\,III}_2^7} = \frac{25\,000}{8{\cdot}58296905} = 2912{\cdot}745.$$

Durch sukzessive Aufzinsung (um 2%) und Abrundung ergibt sich

$O_1 = 2\,913$, sohin Nieten 2 908
$O_2 = 2\,971$, „ „ 2 966
$O_3 = 3\,030$, „ „ 3 025
$O_4 = 3\,091$, „ „ 3 086
$O_5 = 3\,153$, „ „ 3 148
$O_6 = 3\,216$, „ „ 3 211
$O_7 = 3\,280$, „ „ 3 275
$O_8 = 3\,346$, „ „ 3 341
25 000 — 24 960

Der Tilgungsplan lautet demnach:

Ziehung	Anzahl der aufrechten Lose vor der Ziehung	2 K Zinsen per aufrechtes Los		Zahl der Nieten	Erfordernis für die				Gesamterfordernis (einschließl. Zinsen)	
					Nieten		Treffer			
		K	h		K	h	K	h	K	h
1	25 000	50 000	—	2 908	290 800	—	43 000	—	383 800	—
2	22 087	44 174	—	2 966	296 600	—	43 000	—	383 774	—
3	19 116	38 232	—	3 025	302 500	—	43 000	—	383 732	—
4	16 086	32 172	—	3 086	308 600	—	43 000	—	383 772	—
5	12 995	25 990	—	3 148	314 800	—	43 000	—	383 790	—
6	9 842	19 684	—	3 211	321 100	—	43 000	—	383 784	—
7	6 626	13 252	—	3 275	327 500	—	43 000	—	383 752	—
8	3 346	6 692	—	3 341	334 100	—	43 000	—	383 792	—
				24 960						

Das jährliche Erfordernis entspricht einer Verzinsung von etwas über $4^3/_4\,{}^0/_0$.

d) Konvertierung, Rentabilität und Kurse von Anlehen.

§ 37.

Konvertierung von Anlehen.

Wenn nach Emittierung eines Anlehens die Rückzahlungsbedingungen, beziehungsweise bei einem nicht amortisablen Staatsanlehen der Zinsfuß geändert wird, spricht man von einer *Konvertierung des Anlehens.*

Nehmen wir an, bei einem gegen $p\,{}^0/_0$ige *dekursive* Verzinsung und Rückzahlung in n gleich großen Jahresannuitäten begebenen Anlehen K werde nach Entrichtung der k^{ten} Annuität der Zinsfuß auf $q\,{}^0/_0$ herabgesetzt. In welcher Weise wird hiedurch die Amortisierung, beziehungsweise der Tilgungsplan beeinflußt?

Wenn S_k den Schuldrest nach Entrichtung der k^{ten} Annuität, a' die nach der Zinsfußreduktion zu bezahlende Annuität und $\mathrm{r} = 1 + \frac{q}{100}$ bedeutet, dann ist

$$S_k = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \cdots + \frac{a}{r^{n-k-1}} + \frac{a}{r^{n-k}} = a\,.\,\mathrm{T\,IV}_p^{(n-k},$$

beziehungsweise auch

$$S_k = \frac{a'}{\mathrm{r}} + \frac{a'}{\mathrm{r}^2} + \cdots + \frac{a'}{\mathrm{r}^{n-k-1}} + \frac{a'}{\mathrm{r}^{n-k}} = a'\,.\,\mathrm{T\,IV}_q^{(n-k},$$

demnach

$$a\,.\,\mathrm{T\,IV}_p^{(n-k} = a'\,.\,\mathrm{T\,IV}_q^{(n-k} \text{ und } a' = a\frac{\mathrm{T\,IV}_p^{(n-k}}{\mathrm{T\,IV}_q^{(n-k}}.$$

Nun ist

$$\mathrm{T\,IV}_p^{(n-k} < \mathrm{T\,IV}_q^{(n-k}, \text{ sohin auch } a' < a.$$

Nehmen wir nunmehr an, daß auch nach erfolgter Zinsfußermäßigung die Annuität a entrichtet wird, dann ist

$$S_k = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \cdots + \frac{a}{r^{n-k}},$$

beziehungsweise

$$S_k = \frac{a}{\mathrm{r}} + \frac{a}{\mathrm{r}^2} + \cdots + \frac{a}{\mathrm{r}^x}.$$

Nachdem jeder einzelne Summand der 2. Reihe (wegen des kleineren Nenners) größer ist als der darüberstehende der ersten, die Summen S_k beider Reihen jedoch gleich sind, folgt, daß in der 2. Reihe eine geringere Anzahl von Gliedern enthalten sein muß

als in der ersten oder

$$x < n - k.$$

Es hängt also ganz von dem Übereinkommen ab, ob bei der Konvertierung an der ursprünglichen Amortisationsdauer festgehalten und eine kleinere Annuität bedungen oder die von Anfang an entrichtete Annuität beibehalten und die Tilgungszeit verkürzt wird.

Ein gegen $4^1/_4\,{}^0/_0$ige dekursive Verzinsung durch 40 gleich große Jahresannuitäten zu tilgendes Anlehen von 500 000 K soll nach 15 Jahren auf einen $3^3/_4\,{}^0/_0$igen Zinsfuß konvertiert werden.

Nehmen wir zunächst an, es bliebe die Amortisationsdauer aufrecht, dann ist, da

$$a = \frac{K}{\mathrm{T\,IV}_{4^1/_4}^{(40}} = 26\,209\,1949,$$

$$a' = 26\,209{\cdot}1949 \cdot \frac{15{\cdot}21733627}{16{\cdot}04320396} = 24\,860{\cdot}005.$$

Der Schuldner hat also während der letzten 25 Jahre nur eine Annuität von 24 860·01 K anstatt 26 209·20 K zu entrichten.

Eine Probe bezüglich der Richtigkeit besteht darin, daß man untersucht, ob der im Zeitpunkte der Konvertierung vorhandene Schuldrest durch die neue Annuität tatsächlich getilgt wird. Diesbezüglich ist

$$S_{15} = K - t_1\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{4^1/_4}^{(14}] = K - \frac{K}{1 + \mathrm{T\,III}_{4^1/_4}^{(39}}\,[1 + \mathrm{T\,III}_{4^1/_4}^{(14}$$

$$= K\frac{\mathrm{T\,III}_{4^1/_4}^{(39} - \mathrm{T\,III}_{4^1/_4}^{(14}}{1 + \mathrm{T\,III}_{4^1/_4}^{(39}} = 348\,434{\cdot}61,$$

anderseits aber auch

$$a'\,.\,\mathrm{T\,IV}_q^{(n-k} = 24\,860{\cdot}005\,.\,16{\cdot}04320396 = 398\,834{\cdot}12.$$

Nunmehr wollen wir ermitteln, in welcher Zeit das Anlehen, beziehungsweise der vorstehende Schuldrest unter Beibehaltung der ursprünglichen Annuität getilgt wird. Da

$$S_k = a\,.\,\mathrm{T\,IV}_p^{(n-k}, \text{ aber auch } S_k = a\,.\,\mathrm{T\,IV}_q^{(x},$$

$$\text{ist } \mathrm{T\,IV}_q^{(x} = \mathrm{T\,IV}_p^{(n-k}$$

$$\text{oder } \mathrm{T\,IV}_{3^3/_4}^{(x} = \mathrm{T\,IV}_{4^1/_4}^{(25} = 15{\cdot}2173\ldots, \text{ somit } x \genfrac{}{}{0pt}{}{> 22}{< 23}.$$

In ganz ähnlicher Weise hat man vorzugehen, wenn eine *antizipative* Verzinsung in Frage kommt.

Ein gegen 25 Annuitäten bei $4\,{}^0/_0$iger antizipativer Verzinsung zu tilgendes Anlehen von 30 000 K wird nach Entrichtung der 6. Annuität auf $3^1/_2\,{}^0/_0$ konvertiert.

Gemäß S. 75 ist

$$a = \frac{30\,000}{1 + \mathrm{T\,IV}_{4}^{(24}} = 1876{\cdot}163 \text{ und } S_6 = a\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{4}^{(18}] = 25\,308{\cdot}54,$$

$$\text{demnach } 25\,308{\cdot}54 = a'\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{3\cdot5}^{(18}] \text{ und } a' = 1801{\cdot}07,$$

beziehungsweise $25\,308{\cdot}54 = a\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{3\cdot5}^{(x-1}]$; hieraus folgt

$$\mathrm{T\,IV}_{3\cdot5}^{(x-1} = \frac{25\,308{\cdot}54}{1876{\cdot}16} - 1 = 12{\cdot}49.$$

Nun entspricht 11·97 . . . Termin 16
und 12·52 . . . „ 17,

demnach ist $x - 1 \begin{matrix} > 16 \\ < 17 \end{matrix}$ und $x \begin{matrix} > 17 \\ < 18 \end{matrix}$.

§ 38.

Rentabilität und Anlehenskurse.

a) Kursermittlung bei gegebener Rentabilität.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß eine in der Gleichung

$$K = a\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right)$$

vorgenommene Änderung von r (des Zinsfußes) bei gleichbleibendem a und n hinsichtlich des Wertes K eine Änderung in entgegengesetztem Sinne zur Folge hat. Wenn demnach der Gläubiger aus dem Darlehensgeschäfte eine bessere Verzinsung erzielen will, als im Schuldschein bedungen ist — also r größer wird —, dann muß er dem Schuldner nicht den Nennwert K, sondern einen geringeren Betrag effektiv zuzählen.

Kann beispielsweise durch die Annuität von 4497·06 K in 15 Jahren bei 4%iger Verzinsung ein Anlehen von 50 000 K getilgt werden, so wird der Gläubiger eine $4^1/_4$%ige Verzinsung dann erzielen, wenn er für das tilgungsplanmäßig mit 4% zu verzinsende und in 15 Jahren zu amortisierende Darlehen von 50 000 K nur

$$a\,.\,\mathrm{T\,IV}_{4^1/_4}^{(15} = 4497{\cdot}06\,.\,10{\cdot}92652265 = 49\,137{\cdot}17\ K$$

effektiv ausfolgt.

In diesem Falle hat der Geldgeber das Darlehen nicht zum Nennwerte *(al pari)*, sondern zu einem *Emissionskurs* C übernommen, welcher sich allgemein aus folgender Überlegung ergibt:

Für den Nennwert N werden effektiv gezahlt E
„ „ „ 100 „ „ „ C.

Es ist dann

$$C = \frac{100\,E}{N}, \text{ beziehungsweise } E = \frac{C\,.\,N}{100} \text{ und } N = \frac{100\,E}{C}.$$

Für das obige Beispiel folgt

$$C = \frac{4\,913\,717}{50\,000} = 98{\cdot}27.$$

Die russische Staatsanleihe vom Jahre 1906 im Nominalbetrage von 2 133 000 000 K wurde zum Kurse von 88 begeben. Der effektive Erlös betrug daher

$$E = \frac{2\,133\,000\,000\,.\,88}{100} = 1\,877\,040\,000\ K.$$

Ein 4%ig dekursiv zu verzinsendes Anlehen ist durch eine $5^1/_2$%ige Annuität zu tilgen. Welcher Begebungskurs würde einer $4^1/_2$%igen Rentabilität entsprechen?

Um diese Frage zu beantworten, ist es notwendig, den Barwert aller Leistungen des Schuldners bei $4^1/_2$%iger Verzinsung zu ermitteln.

Aus der Gleichung

$$100 = 5{\cdot}5\,.\,\mathrm{T\,IV}_{4}^{(n}$$

folgt für $\mathrm{T\,IV}_{4}^{(n} = 18{\cdot}18$

und für $n \begin{matrix} > 33 \\ < 34 \end{matrix}$.

Es besteht demnach auch die Gleichung

$$100 = 5{\cdot}5\ \mathrm{T\,IV}_{4}^{(33} + \frac{R}{1{\cdot}04^{34}}$$

und aus dieser ergibt sich eine Restzahlung von 0·713, so daß ein Begebungskurs von

$$C = 5{\cdot}5\ \mathrm{T\,IV}_{4^1/_2}^{(33} + \frac{0{\cdot}713}{1{\cdot}045^{34}} = 93{\cdot}785$$

resultiert. Ein Näherungswert ergibt sich, wenn man die Restzahlung unberücksichtigt läßt und nur entweder mit 33 oder 34 gleich großen Annuitäten à 5·5 rechnet.

Für $n = 33$ wäre dann $C' = 93{\cdot}63$
und für $n = 34$ wäre dann $C'' = 94{\cdot}86$.

Handelt es sich nicht um eine Annuitätentilgung, sondern um eine Rückzahlung zu einem festen Termin, dann hat man ebenfalls den Barwert der Leistungen des Schuldners zum Rentabilitätssatze zu bestimmen.

Ein nach 25 Jahren fälliges, mit 4% zu verzinsendes Kapital soll effektiv $4^1/_4$% tragen. Welche *Zuzählungsgebühr* müßte vom Schuldner entrichtet werden?

Damit der Gläubiger eine $4^1/_4$%ige Verzinsung erzielt, hätte er für je 100 K Nominale effektiv nur auszufolgen

$$4\,.\,\mathrm{T\,IV}_{4^1/_4}^{(25} + \frac{100}{1{\cdot}0425^{25}} = 96{\cdot}19.$$

Die Zuzählungsgebühr beträgt demnach 3·81%.

Ein Darlehen von 100 000 K ist bei einer 2%igen antizipativen Semesterverzinsung durch 50 Annuitäten zu tilgen. Bei welchem Begebungskurs würde *a)* eine $2^1/_4$%ige antizipative, *b)* eine $2^1/_4$%ige dekursive Verzinsung erzielt werden?

Hier ist in beiden Fällen zwischen nachschüssiger und vorschüssiger Annuitätenentrichtung zu unterscheiden.

ad a) Da

$$a = \frac{K}{1 + \mathrm{T\,IV}_2^{(49}} = 3\,145{\cdot}49,$$

ergibt sich ein effektiv zu leistender Betrag
bei der Nachhineinentrichtung von

$$E = 2000^{*)} + 3\,145{\cdot}49\,.\,\mathrm{T\,IV}_{2^1/_4\,\mathrm{ant.}}^{(50} = 94\,855{\cdot}40,$$

demnach ein Kurs $C = 94{\cdot}86$ und
bei der Vorhineinentrichtung von

$$E = 3\,145{\cdot}49\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{2^1/_4}^{(49}] = 94\,992{\cdot}74,$$

demnach ein Kurs $C = 94{\cdot}99$.

ad b) Bei Nachhineinannuität ist

$$C = 2 + 3{\cdot}14549\,.\,\mathrm{T\,IV}_{2^1/_4\,\mathrm{dek.}}^{(50}{}^{**)} = 95{\cdot}84,$$

bei Vorhineinannuität ist

$$C = 3{\cdot}14549\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{2^1/_4\,\mathrm{dek.}}^{(49}]^{***)} = 95{\cdot}96.$$

Ein 2%ig antizipativ zu verzinsendes Anlehen ist durch eine $3^1/_2$%ige Semesterannuität zu tilgen. Welcher Begebungskurs entspricht einer $2^1/_4$%igen antizipativen Verzinsung?

Gleichwie bei der analogen Aufgabe gegen dekursive Verzinsung ist auch hier vorerst n und R zu bestimmen.

So ist

$$100 = 3{\cdot}5\,[1 + \mathrm{T\,IV}_2^{(n-1}],$$

demnach

$$\mathrm{T\,IV}_2^{(n-1} = 27{\cdot}571 \text{ und } n \gtrless \begin{matrix}41\\42.\end{matrix}$$

Es besteht somit bei Nachhineinentrichtung die Gleichung

$$100 = 2 + 3{\cdot}5\,.\,\mathrm{T\,IV}_2^{(41} + \frac{R}{\varrho^{42}}; \text{ hieraus folgt } R = 3{\cdot}2913,$$

demnach

$$C = 2 + 3{\cdot}5\,.\,\mathrm{T\,IV}_{2^1/_4}^{(41} + \frac{3\,2913}{\varrho_1{}^{42}} = 95{\cdot}51.$$

---

*) Zinsen für das erste Semester.
**) 29·834396.
***) 30·505670.

Näherungswerte erhielte man

$$\text{in } C' = 2 + 3{\cdot}5\,.\,\mathrm{T\,IV}_{2^1/_4}^{(41} = 94{\cdot}24 \text{ und}$$
$$\text{„ } C'' = 2 + 3{\cdot}5\,.\,\mathrm{T\,IV}_{2^1/_4}^{(42} = 95{\cdot}59.$$

Werden die Annuitäten im vorhinein abgestattet, so ist

$$C = 3{\cdot}5\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{2^1/_4}^{(40}] + \frac{3{\cdot}2913}{\varrho_1{}^{41}} = 95{\cdot}66.$$

Näherungswerte wären

$$C' = 3{\cdot}5\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{2^1/_4}^{(40}] = 94{\cdot}37 \text{ und}$$
$$C'' = 3{\cdot}5\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{2^1/_4}^{(41}] = 95{\cdot}75.$$

b) Rentabilitätsberechnung bei gegebenem Kurs.

Von einem in 40 Jahren zu tilgenden, mit $4^1/_4$% dekursiv zu verzinsenden Anlehen von 150.000 K werden 5000 K als Zuzählungsgebühr vom Gläubiger sogleich in Abzug gebracht. Wie groß ist die Rentabilität?

Es handelt sich nunmehr um die Umkehrung der im früheren Abschnitt erörterten Frage. Auch jetzt ist der dem Schuldner effektiv ausgefolgte Betrag dem Barwert seiner Zahlungen gleichzustellen.

Die Annuität beträgt 5·241839% des Nominales, der Kurs

$$C = \frac{100\,E}{N} = \frac{145}{1{\cdot}5} = 96^2/_3;$$

somit besteht die Gleichung

$$96{\cdot}66 = 5{\cdot}241839\,.\,\mathrm{T\,IV}_x^{(40}$$

und hieraus ergibt sich für x ein etwas unter $4^1/_2$% liegender Zinsfuß. Eine genau $4^1/_2$%ige Rentabilität wäre nämlich vorhanden, wenn der Kurs

$$C = 5{\cdot}241839\,.\,\mathrm{T\,IV}_{4^1/_2}^{(40} = 96{\cdot}458$$

oder der effektive Betrag 144.687 K ausmachen würde.

Von sehr wesentlichem Einfluß auf die Höhe der Rentabilität ist bei Darlehen die häufig vorkommende Einhebung eines sogenannten Regiebeitrages; derselbe wird fast ausnahmslos in Prozenten des jeweiligen Schuldrestes bemessen.

Ein Anlehen von 80 000 K soll zu 4% dekursiv verzinst und in 35 gleich großen Annuitäten derart getilgt werden, daß außerdem von dem jeweiligen Schuldrest ein Regiebeitrag von $^1/_8$% entrichtet wird. Wie groß ist die Rentabilität *a)* wenn das Anlehen al pari, *b)* zum Kurse von 98 begeben wird?

In beiden Fällen handelt es sich zunächst darum, den Barwert des Regiebeitrages von allgemein α% zu berechnen.

Derselbe ist

$$\frac{a}{100}\left(\frac{S_1}{r}+\frac{S_2}{r^2}+\cdots+\frac{S_{n-1}}{r^{n-1}}+\frac{S_n}{r^n}\right)$$

$$=\frac{a}{100}\left(\frac{K-t_1}{r}+\frac{K-(t_1+t_2)}{r^2}+\cdots+\frac{K-(t_1+t_2+\cdots+t_n)}{r^n}\right)$$

$$=\frac{a}{100}\left\{K.\,\mathrm{T\,IV}_p^{(n}-\left[\frac{t_1}{r}+\frac{t_1(1+r)}{r^2}+\frac{t_1(1+r+r^2)}{r^3}+\cdots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{t_1(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})}{r^n}\right]\right\}$$

$$=\frac{a}{100}\left\{K.\,\mathrm{T\,IV}_p^{(n}-\frac{t_1}{r-1}\left(\frac{r-1}{r}+\frac{r^2-1}{r^2}+\frac{r^3-1}{r^3}+\cdots+\frac{r^n-1}{r^n}\right)\right\}$$

$$=\frac{a}{100}\left[K.\,\mathrm{T\,IV}_p^{(n}-\frac{t_1}{r-1}\left(n-\mathrm{T\,IV}_p^{(n)}\right)\right].$$

Werden die konkreten Werte eingesetzt, so erhält man als Wert des Regiebeitrages

$$0{\cdot}00125\left[80\,000\,.\,\mathrm{T\,IV}_4^{35}-\frac{1086{\cdot}1856}{0{\cdot}04}\left(35-\mathrm{T\,IV}_4^{(35)}\right)\right]=1311{\cdot}98.$$

Der Wert der Gesamtleistung des Schuldners beträgt demnach 81 311·98 K, wogegen er nach der Annahme *a)* nur 80 000 K oder für 100 K Nominale 98·39 K effektiv erhält. Und nun ist nur mehr zu ermitteln, welche Rentabilität ein in 35 Jahren zu tilgendes 4%iges Anlehen beim Kurse von 98·39 abwirft. Da die Annuität 5·357732% ausmacht, besteht die Gleichung

$$98{\cdot}39=5{\cdot}357732\,.\,\mathrm{T\,IV}_x^{(35};\ \text{hieraus ist}$$

$$\mathrm{T\,IV}_x^{(35}=18{\cdot}364.$$

Nun ist $\mathrm{T\,IV}_4^{(35}=18{\cdot}6646\ldots$ und $\mathrm{T\,IV}_{4^1/_8}^{(35}=18{\cdot}3519\ldots.$, somit st x wesentlich größer als 4, aber noch etwas kleiner als $4^1/_8$%. Daß dieses Resultat richtig sein muß, ergibt die folgende kurze Überegung: Würde der Regiebeitrag stets vom Schuldrest des vorhergehenden Jahres zu entrichten sein, dann würde eine genau $4^1/_8$%ige Rentabilität vorliegen, weil dann das $^1/_8$ Prozent von demselben Berag gerechnet würde wie die im gleichen Zeitpunkt fälligen 4%igen Zinsen; da aber der Regiebeitrag mit der Annuität von dem nach Abstattung derselben verbleibenden Schuldrest bezahlt wird, muß lie Rentabilität kleiner als $4^1/_8$% sein.

Bei Beantwortung der Frage *b)* ist lediglich zu erwägen, daß ler Schuldner nicht 80 000 K, sondern nur 98%, das sind 78 400 K ffektiv erhält; seine Gegenleistung ist dieselbe wie unter *a)*; der Begebungskurs ist demnach

$$C=\frac{7840}{81{\cdot}31}=96{\cdot}42.$$

Aus der Gleichung

$$96{\cdot}42=5{\cdot}357732\,.\,\mathrm{T\,IV}_x^{35}$$

folgt für

$$x\ \begin{matrix}>4^1/_4\\<4^1/_3\end{matrix}\text{*)}.$$

In ganz ähnlicher Weise wie in dem soeben behandelten Falle wäre grundsätzlich vorzugehen, wenn die Annuität als runder Betrag gegeben, n demnach keine ganze Zahl wäre und ebenfalls ein Regiebeitrag zu entrichten käme. Auch bei antizipativer Verzinsung wird in gleicher Weise vorzugehen sein, so daß von der Durchrechnung konkreter Beispiele wohl abgesehen werden kann.

Ein in Obligationen zerlegtes Anlehen ist mit 4% dekursiv zu verzinsen und in 35 Ziehungen zu amortisieren.

a) Nach Ablauf von 5 Jahren ist der Kurs 97·03; wie groß ist die Rentabilität für den nunmehrigen Käufer?

Für ihn handelt es sich um die Erwerbung eines nun in 30 Jahren zu tilgenden 4%igen Anlehens. Die hiefür erforderliche Annuität beträgt 5·78301%, so daß sich die Rentabilität aus der Gleichung

$$97{\cdot}03=5{\cdot}783\,.\,\mathrm{T\,IV}_x^{(30}$$

bestimmt. Hieraus ist

$$\mathrm{T\,IV}_x^{30}=16{\cdot}779,\ \text{somit}\ x=4^1/_4\%.$$

b) Bei welchem Kurse ergibt sich nach 30 Jahren eine $4^1/_4$%ige Rentabilität?

Für diesen Fall ist die Annuität

$$a=\frac{100}{\mathrm{T\,IV}_4^{5}}=22{\cdot}4627,$$

$$\text{somit der Kurs } C=22{\cdot}4627\,.\,\mathrm{T\,IV}_{4^1/_4}^{5}=99{\cdot}30.$$

c) Bei welchem Kurse ergibt sich nach 30 Jahren eine 4%ige Rentabilität?

Die Antwort auf diese Frage muß, wie wohl selbstverständlich, lauten

$$C=\frac{100}{\mathrm{T\,IV}_4^{(5}}\cdot\mathrm{T\,IV}_4^{(5}=100.$$

Es läßt sich nunmehr ganz allgemein die Frage beantworten: Welche tatsächliche Verzinsung q (Rentabilität) ergibt sich, wenn ein Darlehen 100 durch n gleich große Annuitäten bei p% dekursiv (π% antizipativ) zu tilgen ist und zum Kurse C begeben wird?

Aus

$$C=\frac{100}{\mathrm{T\,IV}_p^{(n}}\cdot\mathrm{T\,IV}_q^{(n}\ \text{bei dekursiver Verzinsung}$$

*) $\mathrm{T\,IV}_{4^1/_3}^{(35}=17{\cdot}8485\ldots$

und

$$C = \frac{100}{1 + \mathrm{T\,IV}_{\pi}^{(n-1}} \cdot \left(1 + \mathrm{T\,IV}_{q\ \mathrm{ant.}}^{(n-1}\right) \text{ bei antizipativer Verzinsung}$$

ergeben sich allgemein die *Rentabilitätsgleichungen*

$$C\,.\,\mathrm{T\,IV}_{p}^{(n} = 100\,.\,\mathrm{T\,IV}_{q}^{n},$$

beziehungsweise

$$C\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{\pi}^{(n-1}] = 100\,[1 + \mathrm{T\,IV}_{q\ \mathrm{ant.}}^{(n-1}].$$

Diese Gleichungen haben natürlich auch Giltigkeit für die Ermittlung der Rentabilität nicht amortisabler *Staatsanlehen;* hiebei ist nur zu berücksichtigen, daß $n = \infty$ und die Annuität gleich den jährlichen Zinsen ist. Somit folgt für

$$C = p\,.\,\mathrm{T\,IV}_{q}^{(\infty} = p\,.\,\frac{1}{\mathrm{r}^{\infty}}\,.\,\frac{\mathrm{r}^{\infty}-1}{\mathrm{r}-1} = p\,.\,\frac{1}{\mathrm{r}-1}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{r}^{\infty}}\right)$$

$$= p\,.\,\frac{100}{q} \text{ und für } q = \frac{100\,p}{C}.$$

Welche Rentabilität ergab sich nach den Kursen am 10. September 1913 für die 4%ige österr. Kronenrente und die $3^1/_2$%ige Investitionsrente?

An dem genannten Tage notierte Kronenrente 82·— und Investitionsrente 73·10, demnach betrug die Rentabilität der Kronenrente

$$q = \frac{100\,.\,4}{82} = 4{\cdot}88\%$$

und jene der Investitionsrente

$$q = \frac{100\,.\,3{\cdot}5}{73{\cdot}10} = 4{\cdot}79\%.$$

c) Paritätsrechnung.

Eine Gemeinde will ein Anlehen von 100 000 K durch 25 Annuitäten tilgen und ist in der Lage, dasselbe bei einer 4%igen Verzinsung zum Nennwerte zu begeben. Zu welchem Kurse wäre das Anlehen bei einem $3^3/_4$%igen Zinsfuße zu emittieren, wenn in beiden Fällen dieselbe Rentabilität erzielt werden soll?

Die bei der 4%igen Verzinsung erforderliche jährliche Annuität beträgt 6401·20. Mit dieser selben Leistung wird in 25 Jahren bei $3^3/_4$% ein Kapital von

$$a\,.\,\mathrm{T\,IV}_{3^3/_4}^{(25} = 6401{\cdot}20\,.\,16{\cdot}04320396 = 102\,695{\cdot}75\ K$$

amortisiert.

Es ist also für die Gemeinde hinsichtlich der jährlichen Leistung ganz gleichgiltig, ob sie eine Schuld im Nominalbetrag von 100 000 K zu 4% verzinslich und in 25 Jahren rückzahlbar oder eine solche von 102 695·75 K zu $3^3/_4$% verzinslich und in ebenfalls 25 Jahren

tilgbar aufnimmt; nur bekäme sie, wenn das Anlehen in beiden Fällen al pari übernommen würde, im zweiten Falle um 2695·75 K mehr als im ersten. Der Darleiher hat sich aber nur bei einer 4%igen Verzinsung zur Übernahme al pari verstanden und wird demnach auch bei der $3^3/_4$%igen Verzinsung mit Rücksicht auf die in beiden Fällen identische Leistung des Schuldners nur 100 000 K effektiv ausfolgen, also das $3^3/_4$%ige Anlehen nur zum Kurse von

$$C = \frac{100\,.\,100\,000}{102\,695{\cdot}75} = 97^3/_8$$

übernehmen.

Nunmehr wäre der Emissionskurs bei $3^3/_4$%iger Verzinsung unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß das Anlehen bei 4%igem Zinsfuß zum Kurse von 98 übernommen würde.

Gegenüber den früheren Bedingungen ändert sich nur der effektiv zugezählte Betrag *(E)*; derselbe beläuft sich beim Kurse von 98 auf 98 000 K, so daß

$$C' = \frac{98\,000\,.\,100}{102\,695{\cdot}75} = 95{\cdot}43.$$

Es ist demnach für den Darleiher (und auch für die Gemeinde, denn sie erhält für dieselbe Annuität beidemale 98 000 K bar) gleichgiltig, ob ein auf 100 000 K Nominale lautendes Anlehen gegen 25jährige Tilgung und 4%ige Verzinsung zum Kurse von 98 oder aber ein ebenfalls in 25 Jahren bei $3^3/_4$%iger Verzinsung zu amortisierendes Anlehen im Nominalbetrage von 102 695·75 K zum Kurse von 95·43 begeben wird. *Es herrscht also,* wie man zu sagen pflegt, *zwischen diesen beiden Kursen Parität.*

Die für den Schuldner so überaus wichtige Frage, ob zwei ihm vorliegende, verschiedene Darlehensangebote gleichwertig sind, ist natürlich sofort entschieden, wenn etwa lediglich im Zinsfuß oder nur im Begebungskurs (effektiven Betrag) ein Unterschied vorhanden ist. Sind aber bei gleicher Tilgungsdauer und gleichem Nennwerte Kurs und Zinsfuß (demnach auch die Annuitäten) verschieden, so führt die folgende Erwägung zur Beantwortung der früheren Frage.

Der Gläubiger P biete für ein p%iges Anlehen (beim Kurse C_p) effektiv E_p und beanspruche dafür die Annuität a_p; der Gläubiger Q biete für ein q%iges Anlehen (beim Kurse C_q) effektiv E_q und fordere die Annuität a_q. Für den Schuldner werden nun die Angebote dann gleichwertig sein, wenn er für die gleiche Leistung denselben effektiven Betrag erhält. Da nun die Verschiedenheit der Zinsfüße auch verschieden große Annuitäten bedingt, empfiehlt es sich, festzustellen, welchen effektiven Betrag man für die eine Annuität beim anderen Gläubiger bekommt. Stimmt der dann erhaltene mit dem von diesem Gläubiger selbst gebotenen Betrag überein, so ist die Parität gegeben.

Ein in 40 Annuitäten zu tilgendes Anlehen werde vom Kapitalisten P bei 4%iger Verzinsung zum Kurse von 96·25, von Q bei $4^1/_4$%iger Verzinsung zum Kurse von 99·50 übernommen. Welches Angebot ist für den Schuldner günstiger?

Hier ist $a_p = \frac{100}{\text{T IV}_4^{(40}} = 5·05235$. Würde diese Annuität an Q entrichtet, so würde ein Nominale von

$$5·05235 \,.\, \text{T IV}_{4^1/_4}^{(40} = 96·385$$

getilgt; dafür würde er effektiv aber nur

$$96·385 \,.\, 0·995 = 95·90$$

zahlen, wogegen P 96·25, also mehr gibt. Daher ist das Angebot des P günstiger. Parität zwischen beiden Angeboten bestünde dann, wenn allgemein

$$a_p \,.\, \text{T IV}_p^{(n} \,.\, \frac{C_p}{100} = a_p \,.\, \text{T IV}_q^{(n} \,.\, \frac{C_q}{100}$$

oder

$$C_p \,.\, \text{T IV}_p^{(n} = C_q \,.\, \text{T IV}_q^{(n}.$$

Aus dieser *Paritätsgleichung* (bei dekursiver Verzinsung) läßt sich natürlich sofort zu dem Angebot des P der Paritätskurs des Q berechnen; er ist

$$C_q = 96·25 \, \frac{\text{T IV}_4^{(40}}{\text{T IV}_{4^1/_4}^{(40}} = 99·86.$$

Desgleichen kann man zu dem Offert des Q den Paritätskurs des P ermitteln; derselbe wäre

$$C_p = 99·5 \, \frac{\text{T IV}_{4^1/_4}^{(40}}{\text{T IV}_4^{(40}} = 95·90.$$

Auch dieses Resultat bestätigt, daß das Angebot des P günstiger ist, denn im Vergleiche zu Q brauchte er nur 95·90 bieten; er offeriert aber für je 100 K 96·25 K.

Bei antizipativer Verzinsung lautet die Paritätsgleichung

$$C_\pi \,[1 + \text{T IV}_\pi^{(n-1}] = C_{\pi'} \,[1 + \text{T IV}_{\pi'}^{(n-1}].$$

Ein in 50 Semestern zu tilgendes Anlehen würde bei $2^1/_4$%iger antizipativer Verzinsung zum Kurse von 99 und bei 2%iger Verzinsung zum Kurse von $94^3/_4$ übernommen. Sind beide Angebote für den Schuldner gleichwertig?

Sowohl aus

$$C_\pi = 94·75 \, \frac{1 + \text{T IV}_2^{(49}}{1 + \text{T IV}_{2^1/_4}^{(49}} = 99·75$$

als auch aus

$$C_{\pi'} = 99 \, \frac{1 + \text{T IV}_{2^1/_4}^{(49}}{1 + \text{T IV}_2^{(49}} = 94·04$$

geht hervor, daß das zweite Offert günstiger ist.

Für nicht amortisable Staatsanlehen lautet die Paritätsgleichung

$$\frac{1}{r^\infty} \frac{r^\infty - 1}{r - 1} \cdot \frac{C_p}{100} = \frac{p}{r^\infty} \frac{r^\infty - 1}{r - 1} \cdot \frac{C_q}{100};\ \text{hieraus folgt}$$

$$\frac{1}{r-1} \cdot C_p = \frac{1}{r-1} \cdot C_q \ \text{und}$$

$$\frac{C_p}{p} = \frac{C_q}{q} \ \text{und schließlich}$$

$$C_p \,.\, q = C_q \,.\, p.$$

Wenn beispielsweise die Kronenrente 82.— notiert, wäre der zugehörige Paritätskurs der Investitionsrente

$$C_{3^1/_2} = \frac{82 \,.\, 3·5}{4} = 71·75.$$

Ist bei einem oder bei beiden Darlehen außer der Annuität ein *Regiebeitrag* zu entrichten, so wird derselbe zuerst im Begebungskurs zum Ausdruck zu bringen sein; der weitere Gang der Rechnung ist derselbe wie der in diesem Abschnitte behandelte.

Ein 4%iges Obligationenanlehen notiere 92·97 und sei noch durch 40 Ziehungen zu tilgen. Wie groß ist der Paritätskurs eines anderen 4%igen Anlehens, bei welchem noch 25 Ziehungen stattfinden?

Da Parität auch besteht, wenn beide Anlehen dieselbe Rentabilität ergeben, hat man zunächst die Rentabilität des ersten Darlehens zu ermitteln. Dieselbe bestimmt sich aus der Gleichung

$$92·97 = \frac{100}{\text{T IV}_4^{(40}} \cdot \text{T IV}_x^{(40} \ \text{mit}\ x = 4^1/_2.$$

Zu diesem Zinsfuß ist nunmehr die Annuität des zweiten Anlehens abzuzinsen; demnach ist der Paritätskurs

$$C = \frac{100}{\text{T IV}_4^{(25}} \cdot \text{T IV}_{4^1/_2}^{(25} = 94·92.$$

Welches wäre der Paritätskurs in der vorangehenden Aufgabe, wenn das noch 25 Ziehungen unterworfene Anlehen mit $3^1/_2$% zu verzinsen wäre?

In diesem Falle wäre

$$C = \frac{100}{\text{T IV}_{3^1/_2}^{(25}} \cdot \text{T IV}_{4^1/_2}^{(25} = 89·97.$$

Eine 4%ige nicht amortisable Rente notiere 80, werfe also genau ein 5%iges Erträgnis ab. Welchen Kurs sollte bei gleicher Rentabilität ein in 50 Jahren zu tilgendes $4^1/_2$%iges Obligationenanlehen aufweisen?

Der gesuchte Paritätskurs wäre

$$C = \frac{100}{\text{T IV}_{4^1/_2}^{(50}} \cdot \text{T IV}_5^{(50\,*} = 92·38.$$

*) $\text{T IV}_5^{(50} = 18·25592546$.

II. Teil.

Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 39.

Einfache Wahrscheinlichkeit.

Ein Ereignis tritt offenbar um so eher ein, je mehr günstige Momente dafür und je weniger ungünstige Momente dagegen sprechen.

Sind beispielsweise in einer Urne nur weiße Kugeln vorhanden, dann wird aus derselben auf irgend einen Zug nur eine weiße Kugel gezogen werden können; sind aber nur schwarze Kugeln vorhanden, dann ist das Eintreffen des Ereignisses — das Ziehen einer weißen Kugel — unmöglich. Werden nun die weißen und schwarzen Kugeln in eine Urne gegeben, dann ist, vorausgesetzt, daß sich die Kugeln weder durch die Größe noch durch die Beschaffenheit, sondern lediglich durch die Farbe voneinander unterscheiden, es weder gewiß noch unmöglich, sondern *nur mehr oder minder wahrscheinlich*, aus der Urne eine weiße Kugel zu ziehen. Der Begriff der *Wahrscheinlichkeit* bewegt sich also zwischen den Begriffen *Unmöglichkeit* und *Gewißheit* und der ihn repräsentierende Wert wird im vorliegenden Falle um so größer sein, je mehr weiße Kugeln oder *günstige Fälle* gegenüber den schwarzen Kugeln oder den *ungünstigen Fällen* unter allen Kugeln — den *möglichen Fällen* — vorhanden sind.

Im allgemeinen definiert man den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit als den Quotienten aus der Anzahl der dem Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle (g) durch die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle (m) oder $w = \frac{g}{m}$.

Sind etwa 5 weiße und 3 schwarze Kugeln in der Urne, dann ist die Wahrscheinlichkeit

für das Ziehen einer weißen Kugel $w_w = \frac{5}{8}$ und

„ „ „ schwarzen „ $w_s = \frac{3}{8}$.

Wären sämtliche Kugeln von weißer Farbe, dann wäre

$$w_w = \frac{8}{8} = 1 \text{ und } w_s = \frac{0}{8} = 0.$$

Es wird demnach die Gewißheit durch 1, die Unmöglichkeit durch Null und die Wahrscheinlichkeit eines nicht gewissen, aber auch nicht unmöglichen Ereignisses durch einen positiven echten Bruch ausgedrückt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiel von 32 Karten 1 Aß zu ziehen? — Nachdem jede der 4 Farben 1 Aß enthält, ist $w = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Fragen wir nun nach der Wahrscheinlichkeit, Cœur-Aß zu ziehen, so ist dieselbe natürlich $w_c = \frac{1}{32}$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, Cœur-Aß *nicht* zu ziehen? Jetzt besteht das fragliche Ereignis in dem Ziehen irgend einer Karte, ausgenommen Cœur-Aß. Die Anzahl der günstigen Fälle beträgt demnach 31, sohin ist die Wahrscheinlichkeit

$$w' = \frac{31}{32} = 1 - \frac{1}{32} = 1 - w_c,$$

d. h. *die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis nicht eintrifft, ist gleich der Differenz aus der Einheit und der absoluten Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses. Entgegengesetzte und absolute Wahrscheinlichkeit ergänzen sich demnach auf 1.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Würfel derart zu werfen, daß die Fläche mit 4 Augen oben zu liegen kommt?

Da $m = 6$ und $g = 1$, ist $w = \frac{1}{6}$.

Dieses Resultat darf aber nicht etwa dahin aufgefaßt werden, daß genau jedes sechstemal die fragliche Fläche geworfen wird, sondern es bedeutet nur, daß unter einer großen Anzahl von Versuchen der sechste Teil darauf entfallen oder unter 6 Würfen diese Fläche *im allgemeinen* einmal zum Vorschein kommen wird.

Vorausgesetzt ist bei diesen Aufgaben, daß *die Fälle* ***gleich*** *möglich* sind, also der Würfel geometrisch genau und gleich dicht ist, die Karten äußerlich in keiner Weise kenntlich gemacht sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln auf einen Wurf die Summe 10 zu werfen?

Die Anzahl der möglichen Fälle erhält man, wenn man jede Fläche des einen mit jeder Fläche des anderen Würfels kombiniert

Bezeichnen wir die beiden Würfel mit I und II, so können die Flächen mit der folgenden Anzahl von Augen geworfen werden:

I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Die Zahl der möglichen Fälle beträgt demnach $m = 36$ und die der günstigen Fälle ist durch die Anzahl jener Kombinationen bestimmt, welche in Summe 10 geben (◯), sohin $g = 3$ und $w = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln auf einen Wurf in Summe *mindestens* 6 und *höchstens* 9 zu werfen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist wieder 36 und die der günstigen jene Kombinationen, welche als Summe 6, 7, 8 und 9 geben (□), sohin

$$w = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln auf einen Wurf *eher* 10 als 11 zu werfen?

Die Anzahl der günstigen Fälle für das Werfen der Summe 10 ist 3 und der Summe 11 ist 2. Dadurch, daß nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, *eher* die eine als die andere Summe zu werfen, ist schon ausgedrückt, daß nur die den beiden Ereignissen günstigen Fälle gegeneinander abgewogen werden und die ungünstigen Fälle ganz unberücksichtigt bleiben können. Es ist dann $g = 3$, $m = 5$ und

$$w = \frac{3}{5} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{36} + \frac{2}{36}}$$

Diese vergleichsweise Wahrscheinlichkeit mehrerer verschiedener Ereignisse heißt relative Wahrscheinlichkeit; dieselbe wird erhalten, wenn man die absolute Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der vergleichenden Ereignisse dividiert.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 5 weißen, 3 schwarzen und 7 roten Kugeln eher eine weiße als eine rote Kugel zu ziehen?

$$w = \frac{\frac{5}{15}}{\frac{5}{15} + \frac{7}{15}} = \frac{5}{12}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus dieser Urne *entweder* eine schwarze *oder* eine rote — also eine nichtweiße — Kugel zu ziehen?

$$w = \frac{10}{15} = \frac{3}{15} + \frac{7}{15}$$

d. h. *die Wahrscheinlichkeit, daß von mehreren unabhängigen Ereignissen entweder das eine oder das andere eintritt, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen jedes der Ereignisse.*

§ 40.

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Die Urne U_1 enthält 3 weiße und 4 rote Kugeln und
„ „ U_2 „ 4 „ „ 2 „ „ .

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus jeder der beiden Urnen eine weiße Kugel zu ziehen?

Bezeichnen wir die weißen Kugeln der Urne U_1 mit a, b, c und jene der Urne U_2 mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so sind die folgenden Verbindungen von weißen Kugeln — also günstigen Fälle — möglich:

$$a\alpha,\ a\beta,\ a\gamma,\ a\delta;\quad b\alpha,\ b\beta,\ b\gamma,\ b\delta;\quad c\alpha,\ c\beta,\ c\gamma,\ c\delta.$$

Es kann also jede weiße Kugel der einen mit jeder weißen Kugel der anderen Urne gemeinsam gezogen werden. In der gleichen Weise kann sich hinsichtlich der möglichen Fälle jede Kugel der einen mit jeder Kugel der anderen Urne kombinieren. Man erhält auf diese Weise 12 günstige und 42 mögliche Fälle; sohin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $w = \frac{12}{42} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}$ oder allgemein:

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mehrere voneinander unabhängige Ereignisse gleichzeitig eintreffen (also die Ereignisse A und B und C usf.), *ist gleich dem Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen jedes der Ereignisse.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel dreimal hintereinander die Zahl 5 zu werfen?

$$w = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das wiederholte Eintreffen desselben Ereignisses ist demnach gleich der bezüglichen Potenz aus der einfachen Wahrscheinlichkeit.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer der Urnen U_1 und U_2 bei geschlossenen Augen mit einer Hand eine rote Kugel zu ziehen?

Die Kugel kann entweder der 1. oder der 2. Urne entnommen werden; die Wahrscheinlichkeit, mit geschlossenen Augen in die 1. Urne zu greifen und daraus eine rote Kugel zu ziehen, ist

$$w_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

und jene, eine rote Kugel aus U_2 zu ziehen,

$$w_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6};$$

sohin die gesuchte Wahrscheinlichkeit $w = w_1 + w_2 = \frac{19}{42}$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne U_1 zweimal nacheinander eine rote Kugel zu ziehen? — Hier muß unterschieden werden, ob die im 1. Zug herausgenommene Kugel wieder zurückgelegt wird oder nicht. Ist das erstere der Fall, dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit der Wert

$$w = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}.$$

Wird die gezogene Kugel nicht zurückgelegt, dann ist

$$w = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne U_1 auf einen Zug 2 rote Kugeln zu ziehen?

Bezeichnet man die 4 roten Kugeln mit 1, 2, 3, 4, so sind die folgenden günstigen Fälle — Kombinationen — möglich: 12, 13, 14, 23, 24, 34. Ebenso wie man auf diese Weise für $g = 6$ erhält, ergibt sich, wenn alle 7 Kugeln zu zweien kombiniert werden, für $m = 21$ und sohin für

$$w = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Für den Wert der Wahrscheinlichkeit ist es demnach gleichgiltig, ob man aus der Urne U_1 auf einen Zug zwei rote Kugeln oder zweimal nacheinander eine rote Kugel zieht, im letzteren Falle aber die zuerst gezogene Kugel nicht wieder in die Urne gibt.

Bedeutet w_a die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis A und w_b, daß das Ereignis B eintrifft, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß

A nicht eintrifft . . . . $1 - w_a$
B „ „ . . . . $1 - w_b$
entweder A oder B eintrifft . $w_a + w_b$

A eintrifft und B nicht . . . $w_a . (1 - w_b)$
B „ „ A „ . . . $w_b . (1 - w_a)$
A und B eintreffen . . . . . $w_a . w_b$
A und B nicht eintreffen . . . $1 - (w_a . w_b)$
weder A noch B eintrifft . . . $(1 - w_a)(1 - w_b)$.

Das vorletzte Ergebnis kann auch durch folgende Erwägung gefunden werden: die Bedingung ist erfüllt, wenn entweder A eintrifft und B nicht, oder B eintrifft und A nicht oder schließlich weder A noch B eintrifft. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß A und B nicht (gleichzeitig) eintreffen, dargestellt durch

$$w_a (1 - w_b) + w_b (1 - w_a) + (1 - w_a)(1 - w_b) = 1 - w_a . w_b.$$

§ 41.

Mathematischer Hoffnungswert und rechtmäßiger Einsatz.

Das Produkt aus dem Jetztwerte eines in Aussicht stehenden Gewinnes und der Wahrscheinlichkeit, denselben zu erlangen, nennt man den mathematischen Hoffnungswert.

A erhält von B 60 *h*, wenn er *a)* mit einer Münze Adler wirft; *b)* einen Würfel derart wirft, daß die Fläche mit 3 Punkten oben zu liegen kommt. — Da das fragliche Ereignis nicht erst in einem späteren Zeitpunkte, sondern sofort stattfindet, entfällt jede Abzinsung und der mathematische Hoffnungswert des A ist demnach

$$\text{im Falle } a)\ \frac{1}{2} \cdot 60 = 30\,h; \quad \text{im Falle } b)\ \frac{1}{6} \cdot 60 = 10\,h.$$

Es braucht wohl erst nicht besonders betont werden, daß auch diese Werte ebenso wie die Wahrscheinlichkeiten keine absoluten, sondern nur durchschnittliche Werte darstellen.

B wird sich zu der Leistung in der Regel nur dann entschließen, wenn er von A ein bestimmtes Entgelt — einen *Einsatz* — erhält. Wie hoch ist dieser zu bemessen?

Hätte A überhaupt keine *Chance*, den in Aussicht stehenden Betrag zu gewinnen, wäre also dessen Wahrscheinlichkeit und sohin auch sein mathematischer Hoffnungswert Null, dann hätte B auch keinerlei Risiko zu tragen und billigerweise auch keinen Einsatz zu beanspruchen. Nun beträgt aber der Hoffnungswert des B nicht 60 *h*, sondern

$$\text{im Falle } a)\ \frac{1}{2} \cdot 60 = 30\,h \quad \text{und im Falle } b)\ \frac{5}{6} \cdot 60 = 50\,h,$$

mithin ist der Wert des von ihm zu befürchtenden Verlustes 30, beziehungsweise 10 *h* oder der mathematische Hoffnungswert des A, und diese Beträge wird B als *rechtmäßigen Einsatz* begehren können, während er selbst 30, beziehungsweise 50 *h* beizusteuern hat.

Es folgt demnach, daß bei einem gerechten Spiele der Einsatz jedes Spielers gleich dem mathematischen Hoffnungswerte desselben sein muß oder, da die Hoffnungswerte sich wie die Wahrscheinlichkeiten verhalten, *die Einsätze im selben Verhältnisse stehen sollen wie die Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen.*

A wettet mit B, daß er mit 2 Würfeln auf einen Wurf mindestens die Summe 9 wirft und leistet einen Einsatz von 10 h. Wie groß ist der Einsatz des B, welcher dann gewinnt, wenn A verliert? — Die Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, ist $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$, die Wahrscheinlichkeit, daß B gewinnt, $\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$, sohin besteht die Proportion $10:x=\frac{5}{18}:\frac{13}{18}$, woraus $x=26\,h$.

§ 42.

Bestimmung des Wertes eines Loses. Versicherung gegen Verlosungsverlust. Promessengeschäft.

Es ist der wahre Wert eines Loses des im § 36, S. 89, näher erörterten Prämienanlehens unmittelbar vor der 6. Ziehung zu bestimmen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe hat man zu erwägen, daß an den Erfordernissen der 6., 7. und 8. Ziehung nur mehr die unmittelbar vor der 6. Ziehung noch aufrechten Lose, beziehungsweise deren Besitzer partizipieren. Will man nun ermitteln, wie groß der Anteil jedes einzelnen Loses an den vom Schuldner noch zu leistenden Zahlungen ist, so hat man die letzteren auf den Zeitpunkt der Wertermittlung zu diskontieren und diese Summe auf die vorhandenen Lose aufzuteilen. Die Zahl der letzteren beträgt 9842 und der Barwert der drei letzten Jahreserfordernisse, wenn die Eskomptierung zu dem Zinsfuß des Anlehens vorgenommen wird,

$$383\,784+\frac{383\,752}{1{\cdot}02}+\frac{383\,792}{1{\cdot}02^2}=1\,128\,900,$$

sohin der *wahre Wert* eines Loses $\frac{1\,128\,900}{9842}=114{\cdot}70\;K$.

Der *Kurswert* sollte sich von dem wahren Werte nur um die bis zum Kaufstage aufgelaufenen Zinsen unterscheiden, denn die letzteren sind im wahren Werte bereits inbegriffen, müssen aber bei börsemäßigen Käufen dem Verkäufer extra vergütet werden. Damit sie also vom Käufer nicht doppelt entrichtet werden brauchen, sollte der Kurswert unmittelbar vor der 6. Ziehung

$$114{\cdot}70-2\,^{*})=112{\cdot}70\;K$$

*) 2 K Zinsen pro Stück und Jahr.

betragen. Tatsächlich wird derselbe aber wegen der seitens des Publikums in der Regel viel zu hoch eingeschätzten Gewinstchance beträchtlich höher sein. Notieren die Lose beispielsweise 125·—, so wird jener Besitzer, welcher ein Los zu diesem Kurse erworben hat, in dem Falle, als dasselbe aus einer Ziehung als Niete (mit 100 K) hervorgeht, einen effektiven Verlust von 25 K erleiden.

Dieser Gefahr kann er dadurch entgehen, daß er sich gegen *Verlosungsverlust* versichert. Die dafür zu zahlende *Prämie* wird in ganz ähnlicher Weise ermittelt, wie der *rechtmäßige Einsatz* in den im § 41 besprochenen Fällen.

Fassen wir wieder die 6. Ziehung ins Auge, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in derselben das Los mit dem Nominalbetrag von 100 K gezogen wird, $\frac{3211}{9842}$, sohin der Wert des zu befürchtenden Verlustes, beziehungsweise die rechnungsmäßige *Prämie* $\frac{3211}{9842}\cdot25=8{\cdot}16\;K$.

Würde das Los in der 6. Ziehung nicht gezogen, so müßte sich der Besitzer, um einem eventuellen Verlust auch in Hinkunft zu begegnen, natürlich auch vor der 7. und eventuell auch noch vor der 8. Ziehung versichern lassen.

Durch das Gesetz vom 7. November 1862, betreffend das *Promessengeschäft mit Anlehenslosen*, ist die Möglichkeit geschaffen worden, sich auf legalem Wege an Verlosungen zu beteiligen, ohne selbst Besitzer eines Loses zu sein. Das Gesetz bestimmt nämlich im § 1: „*Das Promessengeschäft, d. i. die Veräußerung der Gewinsthoffnung eines Loses*, wird unter nachstehenden Bedingungen gestattet:

. . . . *b)* Die Gewinsthoffnung muß ein bestimmtes, d. i. durch die Merkmale seiner Auslosung bezeichnetes Los eines inländischen Anlehens und eine bestimmte Ziehung desselben betreffen. . . . . . *d)* Über das Rechtsgeschäft muß eine schriftliche Urkunde (der Promessenschein), und zwar auf einem von der Finanzverwaltung hiezu . . . ausgegebenen, vorschriftsmäßig gestempelten Blankett ausgefertigt werden."

Es darf also die Gewinsthoffnung eines Loses veräußert, beziehungsweise gekauft werden, d. h. es kann ein Losbesitzer (vornehmlich Banken und Wechselstuben) gegen ein gewisses Entgelt jemandem ein bestimmtes Los für eine bestimmte Ziehung mit dem „Versprechen" überlassen, ihm, falls das Los gezogen wird, den darauf entfallenden Einlösungsbetrag auszufolgen.

Wie groß ist der Wert einer Promesse auf das Anlehen S. 89 für die 4. Ziehung?

In dieser werden (3086 + 5) Lose mit 351 600 K eingelöst, so daß der Durchschnittswert eines Loses $\frac{351\,600}{3091}=113{\cdot}75\;K$ beträgt. Die

Wahrscheinlichkeit, daß das Los in der 4. Ziehung gezogen werde, ist

$$\frac{3086 + 5}{16\,086} = 0{\cdot}19216,$$

demnach der mathematische Hoffnungswert 113·75 . 0·19216 = 21·86 *K*. Denselben Wert erhielte man, wenn man das Erfordernis für Nieten und Treffer durch die Anzahl der aufrechten Lose dividieren würde.

$$\frac{351\,600}{16\,086} = 21{\cdot}86.$$

§ 43.

Zahlen-Lotto und Klassenlotterie.

Eine staatliche Institution, welche der Wahrscheinlichkeitsrechnung mannigfache Probleme zur Lösung gibt, ist das *Zahlen-Lotto.* Seine Geburtsstätte ist Italien und wahrscheinlich das Jahr 1620. In Genua wurden nämlich unter 100 Senatoren 5 durch das Los für die höchsten Ehrenämter bestellt und auf diese Einrichtung bezügliche Wetten dahin abgeschlossen, daß dieser oder jener Name gezogen werde. Einige Bankiers versprachen jedem den 20 000fachen Betrag seines Einsatzes, wenn er alle, entsprechend weniger, wenn er nur einige Namen errate. Allmählich übernahm der Staat dieses für die Unternehmer höchst gewinnreiche Spiel, nur wurden an die Stelle der 100 Namen die Zahlen von 1—90 gesetzt, von denen stets 5 gezogen werden.

Der Vorgang bei einer solchen öffentlichen Lottoziehung ist der folgende: Die auf Papierstreifen aufgeschriebenen Zahlen werden der Reihe nach verlesen und vorgezeigt, die Streifen einzeln zusammengerollt, jeder derselben in eine Hülse und diese 90 völlig geschlossenen Hülsen in eine Trommel gegeben, deren Wände aus Glas sind und an deren Rücken sich ein Türchen befindet. Durch dieses entnimmt, nachdem die Trommel behufs Mischung der Nummern mehreremale nach rechts und links gedreht worden ist, ein Waisenknabe eine Hülse. Ist die in derselben enthaltene Nummer verlesen (als „erster Ruf"), wird die Trommel abermals gedreht und eine zweite Zahl (als „zweiter Ruf") gezogen; dieser Vorgang wiederholt sich noch ein drittes, viertes und fünftes Mal.

Die von den Spielern geleisteten Einsätze können entweder auf *bestimmte Auszüge* (Nominate) oder auf *unbestimmte Auszüge* (Extrakte) oder auf *Amben* oder auf *Ternen* gemacht werden.

Wird eine Zahl derart besetzt, daß der Ruf, auf welchen sie erscheinen soll, angegeben wird, so heißt diese Spielart: auf den *bestimmten Auszug* oder *bestimmten Ruf (Nominat) spielen.*

Die Wahrscheinlichkeit, die Nummer auf den 1. Ruf zu erraten, ist offenbar $\frac{1}{90}$. Soll dieselbe auf den 2. Ruf gezogen werden, dann ist zu erwägen, daß sich diese Wahrscheinlichkeit zusammensetzt aus der

Wahrscheinlichkeit, auf den 1. Ruf nicht, wohl aber auf den 2. Ruf gezogen zu werden, wobei zu berücksichtigen ist, daß die zuerst gehobene Nummer nicht zurückgelegt wird. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $\left(1 - \frac{1}{90}\right) \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl auf den 3. Zug erscheinen soll, ist ganz ähnlich zu bilden:

$$\left(1 - \frac{1}{90}\right)\left(1 - \frac{1}{89}\right) \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{90}.$$

Das gleiche Resultat erhält man für die Wahrscheinlichkeiten, daß die Zahl auf den 4. oder auf den 5. Ruf gezogen werde, so daß, da die Reihenfolge des Auszuges ganz irrelevant ist, die Wahrscheinlichkeit, ein Nominat-Spiel zu gewinnen, $\frac{1}{90}$ beträgt

Ein *Extrakt-Spiel* liegt dann vor, wenn auf das Erraten einer einzelnen Zahl gewettet wird, ohne daß man bestimmt, auf welchen *Ruf* oder als wievielte Zahl die besetzte Nummer erscheinen soll.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die betreffende Zahl entweder auf den 1. oder 2., 3., 4. oder 5. Ruf gezogen werde, ist

$$w_1 = \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

und die Wahrscheinlichkeit, den Extrakt nicht zu machen, $w'_1 = \frac{17}{18}$. Nehmen wir an, der Spieler besetze die betreffende Nummer mit dem geringsten Einsatz von 12 *h*, dann bestünde die Proportion $12 : x = \frac{1}{18} : \frac{17}{18}$, woraus $x = 204$, so daß als Betrag, welcher im Gewinstfalle von Seite der Lottounternehmung gezahlt werden sollte, 204 + 12*) = 216 *h* oder der *18fache Einsatz* des Spielers resultiert (was übrigens aus w_1 auch unmittelbar folgt). Es wird jedoch nur der *14fache Einsatz* ausbezahlt, so daß sich der Spieler von vornherein im Nachteile befindet; sein mathematischer Hoffnungswert ist eben nicht seinem Einsatze, sondern nur $\frac{1}{18} \cdot 14 = 0{\cdot}7$ desselben gleich. Beim *Nominat-Spiel* wird anstatt des *90fachen* Einsatzes nur das *67fache* der gemachten Einlage ausbezahlt, so daß der Hoffnungswert des Spielers nur $\frac{1}{90} \cdot 67 = 0{\cdot}74$ des Einsatzes ausmacht.

Ein *Ambo* besteht in dem Erraten von 2 aus 2 oder mehr besetzten Zahlen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen *Ambo solo,* d. h. von 2 besetzten Zahlen beide zu erraten?

---

*) Der Einsatz des Spielers.

Denkt man sich die Ambe in 2 Extrakte zerlegt und eine davon bereits erraten, so hat man nur mehr die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, aus 89 Zahlen unter 4 gezogenen eine zu erraten. Diese Wahrscheinlichkeit ist $\frac{4}{89}$ und die Wahrscheinlichkeit, beide Extrakte zu erraten,

$$w_2 = \frac{1}{18} \cdot \frac{4}{89} = \frac{1}{400\cdot5}.$$

Der Spieler hätte demnach im Falle des Erratens der Ambe Anspruch auf den 400·5fachen Einsatz, erhält aber nur das *240fache* desselben, so daß der Hoffnungswert nur $\frac{1}{400\cdot5} \cdot 240 = 0\cdot599$ der geleisteten Einlage beträgt.

Besetzt der Spieler beim Ambo-Spiel 3 Zahlen, so wird, da diese 3 Ziffernpaare enthalten und daher die Chance, zu gewinnen, dreimal so groß ist, nur die 80fache, bei 4 besetzten Zahlen, da diese 6*) Kombinationen zu 2 Zahlen bilden können, die 40fache und bei 5 besetzten Zahlen, welche 10 Ambi ermöglichen, die 24fache Spieleinlage ausbezahlt. Anderseits wird in dem Falle, wenn bei mehr als 2 besetzten Nummern mehr als 2 Zahlen erraten werden, der Ambo so vielfach gewonnen, als die erratenen Zahlen Ambi enthalten, demnach wird,

wenn von 3 besetzten Zahlen 3 erraten werden, das 80 . 3 = 240fache
„ „ 4 „ „ 3 „ „ „ 40 . 3 = 120 „
„ „ 5 „ „ 3 „ „ „ 24 . 3 = 72 „
„ „ 4 „ „ 4 „ „ „ 40 . 6 = 240 „
„ „ 5 „ „ 4 „ „ „ 24 . 6 = 144 „
„ „ 5 „ „ 5 „ „ „ 24 . 10 = 240 „
bezahlt.

Ein *Terno* wird gewonnen, wenn von 3 oder mehr besetzten Zahlen 3 erraten werden. Die bezügliche Wahrscheinlichkeit läßt sich auf die Art bestimmen, daß man sich den Terno in eine Ambe und einen Extrakt zerlegt denkt. Die Wahrscheinlichkeit für die erstere ist $\frac{1}{400\cdot5}$ und dafür, daß aus 88 Nummern unter 3 gezogenen 1 erraten wird, ist $\frac{3}{88}$, sohin die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w_3 = \frac{1}{400\cdot5} \cdot \frac{3}{88} = \frac{1}{11\,748}$$

Der Spieler erhält anstatt des 11748fachen nur den *4800fachen* Einsatz, sein Hoffnungswert beträgt demnach nur $\frac{1}{11\,748} \cdot 4800 = 0\cdot409$ der gemachten Einlage. Besteht der zu Terno gespielte Satz aus mehr als 3 Zahlen, so vermindert sich — analog wie beim Ambo-Spiel —

*) Sind die besetzten Zahlen z. B. 1, 2, 3, 4, so wären folgende Ambi möglich: 12, 13, 14, 23, 24, 34.

der einfache Ternogewinn in dem Maße, als sich die Gewinnkombinationen vervielfältigen. So beträgt der Gewinn bei 4 besetzten Zahlen, welche 4 Ternen zulassen, das 1200fache der Einlage, bei 5 Zahlen, welche 10 Ternen ermöglichen, das 480fache usf. Anderseits findet im Erratungsfalle von mehr als 3 Zahlen die Vergütung der erwähnten Vielfachen des Einsatzes so oftmal statt, als die erratenen Zahlen Gewinnkombinationen ergeben, d. i.

wenn von 4 besetzten Zahlen 4 erraten werden, 1200 . 4 = 4800mal,
„ „ 5 „ „ 4 „ „ 480 . 4 = 1920 „
„ „ 5 „ „ 5 „ „ 480 . 10 = 4800 „

Es kann natürlich nicht überraschen, daß diese Gewinstquoten gegenüber jenen in den oben angeführten 3 letzten Fällen des Ambo-Spieles bedeutend größer sind, da ja auch die Wahrscheinlichkeit, einen Terno zu erraten, um vieles geringer ist, demnach der in Aussicht stehende Gewinn erheblich größer sein muß, als wenn von vornherein nur auf Ambo gespielt wird.

Zu bemerken ist überdies, daß von jedem Gewinst noch eine *Gebühr von 15%* zu entrichten ist und dem Lottogefälle das Recht vorbehalten bleibt, gewisse Nummern *zu sperren*, d. h. die Einsätze auf besonders stark besetzte Zahlen vor der Ziehung zurückzuweisen.

Untersuchen wir noch, um wieviel sich die Genuesischen Bankiers gegenüber ihren Spielern im Vorteil befanden.

Aus 100 Namen von 5 gezogenen alle 5 zu erraten, hat die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{2}{97} \cdot \frac{1}{96} = \frac{1}{75\,287\,520}$$

und hätte demnach nicht mit dem 20 000fachen, sondern mit dem mehr als 75 000 000fachen Einsatz entschädigt werden sollen.

Durch das Gesetz vom 3. Jänner 1913 wurde eine allmähliche, spätestens binnen 10 Jahren gänzlich durchzuführende **Aufhebung des Zahlenlottos** verfügt und die Regierung ermächtigt, an dessen Stelle *Klassenlotterien* mit der Maßgabe durchzuführen, „daß mindestens 70% des vorgesehenen gesamten Spielkapitals als Gewinste verteilt werden".

Der Plan der 1. und 2. deutschösterreichischen Klassenlotterie umfaßte 110 000 Lose, auf welche in 5 Ziehungen (Klassen) 55 000 Gewinne entfallen, und zwar

in der 1. Klasse	2 750	Gewinne	über	367 200 *K*
„ „ 2. „	2 750	„	„	513 000 „
„ „ 3. „	2 750	„	„	709 000 „
„ „ 4. „	2 750	„	„	900 000 „
„ „ 5. „	44 000	„	„	12 558 800 „
Summe	55 000	„	„	15 048 000 *K*

Die Einlage betrug bei jeder Klasse 40 K für das ganze Los, 10 K für ein Viertellos und 5 K für ein Achtellos*). Das Spielkapital belief sich demnach auf

$$40 \,.\, 5 \,.\, 110\,000 = 22\,000\,000 \;K$$

und die Gewinne auf 68·4% davon.

Ein in der 1. bis 4. Klasse gezogenes Los nimmt an dem Spiele in den höheren Klassen nicht mehr teil. In der 5. Klasse erhält jenes Los, auf welches der letztgezogene Gewinn von mindestens 2 000 K entfällt, als Zuschlag zu dem Gewinne eine Prämie von 700 000 K**).

Da die Zahl der Gewinste in den ersten 4 Klassen gleich, ja in der 5. Klasse noch bedeutend größer ist, die an der Ziehung teilnehmenden Lose aber mit jeder Klasse naturgemäß abnehmen, wird die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens für jede Klasse größer und insbesondere für die letzte ganz ungewöhnlich groß sein, nämlich $\frac{1}{40}$, beziehungsweise $\frac{1}{39}, \frac{1}{38}, \frac{1}{37}, \frac{1}{2{\cdot}25}$.

Aus diesem Grunde muß derjenige, welcher sich erst nach der Ziehung der 1. Klasse am Spiel beteiligen will, die Einlagen der bereits gezogenen Klassen nachzahlen. Dessenungeachtet ist es klar, daß im Hinblick auf das bei den ersten 4 Klassen allmähliche, dann aber sprunghafte Ansteigen der Gewinstbeträge die Lage des Spielers mit jeder weiteren Ziehung eine günstigere wird. So beträgt der mathematische Hoffnungswert eines ganzen Loses

für die 1. Klasse $\frac{2\,750}{110\,000} \cdot \frac{367\,200}{2\,500} = 3{\cdot}34\,K$ od. 8·4% d. Einl.

„ „ 1. und 2. Klasse $\frac{5\,500}{110\,000} \cdot \frac{880\,200}{5\,500} = 8{\cdot}-\,K$ „ 10% „ „

„ „ 1. bis 3. „ $\frac{8\,250}{110\,000} \cdot \frac{1\,589\,200}{8\,250} = 14{\cdot}45\,K$ „ 12% „ „

„ „ 1. „ 4. „ $\frac{11\,000}{110\,000} \cdot \frac{2\,489\,200}{11\,000} = 22{\cdot}63\,K$ „ 14·1% „ „

„ „ 1. „ 5. „ $\frac{55\,000}{110\,000} \cdot \frac{15\,048\,000}{55\,000} = 136{\cdot}80\,K$ „ 68·4% „ „

Bemerkt sei noch, daß die Auszahlung der Gewinne in der Klassenlotterie gegen Aushändigung der Gewinnlose **ohne jeden Abzug und insbesondere auch ohne jede Gewinngebühr** erfolgt.

*) Hiezu tritt noch ein 10%iger Manipulationsbeitrag für die Geschäftsstellen.

**) Diese Prämie ist in dem Betrage von 12 558 800 bereits enthalten.

§ 44.

Wahrscheinlichkeit in bezug auf die Lebensdauer des Menschen (Lebens- und Sterbens-Wahrscheinlichkeit).

Ein anderes Gebiet, auf welchem die Wahrscheinlichkeitsrechnung Anwendung findet, ist die *Lebensversicherung.* Wenngleich das Wesen derselben in dem folgenden Abschnitte noch des Ausführlichen erörtert werden wird, sei doch schon hier hervorgehoben, daß es sich dabei im allgemeinen um die *Auszahlung von Kapitalien im Falle des Todes oder des Erlebens eines bestimmten Altersjahres* handelt. Nun ist es aber unmöglich, die voraussichtliche Lebensdauer, beziehungsweise den Fälligkeitstermin der versicherten Summe eines einzelnen Menschen auch nur annähernd mit einiger Sicherheit anzugeben; dagegen ist es eine Tatsache, daß nur wenige Menschen ein Alter von 90 Jahren und darüber erreichen, ein ansehnlicher Teil der Bevölkerung aber 70 und 60 und noch weit mehr Personen 50 und 40 Jahre alt werden. Es ist darum auch die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mensch das 40. Lebensjahr erreicht, erheblich größer, als daß er 70 oder 80 Jahre alt oder noch älter wird.

Hat man nun auch dergestalt aus der Erfahrung die Tatsache geschöpft, daß im allgemeinen *mit zunehmendem Alter die Wahrscheinlichkeit, das nächste Jahr zu überleben, kleiner* oder, was meritorisch das gleiche ist, *die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre zu sterben, größer wird,* so ist damit doch noch nicht die Frage nach den absoluten Werten dieser Wahrscheinlichkeiten beantwortet. Behufs möglichst genauer Ermittlung derselben wurden sowohl für die Allgemeinheit auf Grund der Bevölkerungsstatistik als auch insbesondere von den Lebensversicherungs-Gesellschaften verschiedener Länder Untersuchungen über den Verlauf der Sterblichkeit unter ihren Versicherten angestellt. Bei diesen Untersuchungen wird, wie wir noch später sehen werden, das Beobachtungsmaterial dahin verarbeitet, daß genau konstatiert wird, wie viele von einer bestimmten Anzahl in irgend einem Zeitpunkte vorhandener gleichalteriger Personen nach 1, 2, 3 ... n Jahren noch am Leben sind. *Eine* solche, *das allmähliche Absterben einer großen Anzahl von Personen veranschaulichende Darstellung nennt man eine Absterbeordnung oder Sterblichkeitstafel.*

Die praktische Verwertung einer solchen Tafel wird dadurch möglich, daß die Versicherungs-Gesellschaften annehmen, der Verlauf der Sterblichkeit unter ihren Versicherten werde im Durchschnitte der gleiche sein wie unter jenen Personen, aus deren Beobachtung die Tafel konstruiert wurde. Es ist unschwer einzusehen, daß diese Hypothese um so berechtigter sein wird, aus einem je umfang-

reicheren Material die betreffende Sterblichkeitstafel abgeleitet und je neueren Datums sie ist. Dementsprechend sind vor einiger Zeit auch die *österreichischen* und *ungarischen* Lebensversicherungs-Anstalten daran gegangen, in ähnlicher Weise, wie dies bereits von deutschen, englischen, französischen und amerikanischen Gesellschaften geschehen ist, *Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen und ungarischen Versicherten (österreichisch-ungarische Sterblichkeitstafeln)* zu konstruieren.

Nach der auf S. 20—21 der Hilfs-Tabellen abgedruckten Sterblichkeitstafel (der 17 englischen Gesellschaften) erreichen von 100 000 10jährigen Personen 99 324 ein Alter von 11 Jahren, während 676 Personen im Laufe des Jahres sterben. Nachdem also von den anfangs vorhandenen nicht mehr alle Personen im Alter 11 leben, kann man füglich von einer Wahrscheinlichkeit des 10-Jährigen, das Alter 11 zu erreichen, sprechen. Die Möglichkeit, 11 Jahre alt zu werden, ist für alle 10-Jährigen vorhanden, sohin die Zahl der möglichen Fälle durch $l_{10} = 100\,000$ und die der günstigen Fälle durch jene Personen gegeben, welche tatsächlich das Alter 11 erreichen, d. s. $l_{11} = 99\,324$, so daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit darzustellen ist durch

$$p_{10} = \frac{l_{11}}{l_{10}} = \frac{99\,324}{100\,000} = 0{\cdot}99324.$$

In ähnlicher Weise kann man die Wahrscheinlichkeit ermitteln, daß eine jetzt 10jährige Person das Alter 11 nicht erlebt. Die Möglichkeit zu sterben, ist wieder für alle l_{10} Personen vorhanden, tatsächlich sterben im Laufe des Jahres $d_{10} = 676$ Personen, demnach ist die Wahrscheinlichkeit eines 10-Jährigen, innerhalb eines Jahres zu sterben (die sogenannte *Sterbens-Wahrscheinlichkeit*),

$$q_{10} = \frac{d_{10}}{l_{10}} = \frac{676}{100\,000} = 0{\cdot}00676.$$

Das gleiche Resultat erhält man natürlich auch mit Hilfe der entgegengesetzten (Lebens-)Wahrscheinlichkeit:

$$q_{10} = 1 - p_{10} = 1 - \frac{99\,324}{100\,000} = \frac{676}{100\,000}.$$

Wie groß ist die Sterbens-Wahrscheinlichkeit des 40-Jährigen?

$$q_{40} = \frac{d_{40}}{l_{40}} = \frac{815}{78\,653} = 0{\cdot}01036.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine jetzt 18jährige Person noch 47 Jahre lebt? — Die Frage ist identisch mit jener nach dem Alter von 65 Jahren. Dasselbe erreichen von den $l_{18} = 94\,620$ Personen insgesamt $l_{65} = 46\,754$ Personen, so daß

$$_{47}p_{18} = \frac{l_{65}}{l_{18}} = \frac{46\,754}{94\,620} = 0{\cdot}494 = 0{\cdot}5.$$

Man nennt die Differenz zwischen jenem Alter, für dessen Erreichung die Wahrscheinlichkeit $1/2$ besteht und dem gegenwärtigen Alter die *wahrscheinliche Lebensdauer*.

Wie groß ist die wahrscheinliche Lebensdauer für eine 25jährige Person? — Da $l_{25} = 89\,835$, müßte, damit der Quotient $1/2$ betrage, im Zähler 44 918 stehen. Diese Anzahl von Lebenden ist zwar in der Tafel nicht enthalten, wohl aber $44\,693 = l_{66}$, so daß die wahrscheinliche Lebensdauer $66 - 25 = 41$ Jahre beträgt.

In einer Klasse befinden sich 6 17jährige, 25 18jährige, 11 19jährige, 5 20jährige und 1 21jähriger Schüler; wie viele von diesen 48 Schülern dürften nach 20 Jahren vermutlich noch leben?

$$w = 6 \cdot \frac{81\,038}{95\,293} + 25\,\frac{80\,253}{94\,620} + 11\,\frac{79\,458}{93\,945} + 5\,\frac{78\,653}{93\,268} + \frac{77\,838}{92\,588} = 41.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein 30-Jähriger vor seinem 55. Lebensjahre stirbt? — Die Frage ist identisch mit jener, das 55. Lebensjahr nicht zu erreichen, sohin

$$_{25}Q_{30} = 1 - \frac{l_{55}}{l_{30}} = \frac{86\,292 - 63\,469}{86\,292} = 0{\cdot}265.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein 35-Jähriger im 62. Lebensjahre stirbt? — Die Anzahl der günstigen Fälle ist gegeben durch jene Personen, welche als 61-Jährige im nächsten Jahre (also vor Vollendung des 62. Lebensjahres) sterben, sohin

$$_{26}q_{35}{}^{*)} = \frac{l_{61} - l_{62}}{l_{35}} = \frac{d_{61}}{l_{35}} = \frac{1770}{82\,581} = 0{\cdot}0214.$$

Man kann die Aufgabe aber auch mit Hilfe der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit lösen, indem man erwägt, daß der Bedingung entsprochen ist, wenn der 35-Jährige das 61. Lebensjahr erreicht und der dann 61-Jährige vor Vollendung des 62. Lebensjahres stirbt, somit

$$w = \frac{l_{61}}{l_{35}} \cdot \left(1 - \frac{l_{62}}{l_{61}}\right) = \frac{l_{61} - l_{62}}{l_{35}}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 2 Personen im Alter von x und y Jahren nach n Jahren

a) beide leben? $\quad {}_np_{xy} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y};$

b) nur eine Person lebt? — Diese Bedingung ist erfüllt, wenn entweder x lebt und y gestorben ist oder umgekehrt, sohin

$$w = \frac{l_{x+n}}{l_x}\left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right) + \frac{l_{y+n}}{l_y}\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right).$$

*) Wahrscheinlichkeit, daß der 35-Jährige nach 26 Jahren im Laufe des nächsten Jahres sterben wird.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 3 Personen im Alter von x, y und z Jahren nach n Jahren

a) alle 3 leben? $w_3 = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \frac{l_{z+n}}{l_z}$;

b) 2 leben? $$w_2 = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \left(1 - \frac{l_{z+n}}{l_z}\right) + \\ + \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{z+n}}{l_z} \left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right) + \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \frac{l_{z+n}}{l_z} \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l}\right);$$

c) mindestens 2 leben? $w_{2,3} = w_2 + w_3$.

III. Teil.

Lebensversicherung.

Erster Abschnitt.

Prämienberechnung.

§ 45.

Sterblichkeitstafeln.

Bevor auf die verschiedenen Versicherungskombinationen eingegangen wird, sollen die derzeit gebräuchlichsten Sterblichkeitstafeln kurz besprochen und die Art der Herstellung einer solchen skizziert werden.

Die Tafel der 17 englischen Gesellschaften ist aus den Beobachtungen von beiläufig 84 000 bei 17 englischen Gesellschaften versichert gewesenen Personen abgeleitet und wurde im Jahre 1843 veröffentlicht. Trotzdem diese Tafel ausschließlich auf englischem Beobachtungsmaterial beruht, ist sie gegenwärtig noch bei einigen österreichischen Versicherungs-Gesellschaften in Gebrauch. Die neueren Anstalten allerdings verwenden zumeist

die Tafeln der 23 deutschen Gesellschaften. Dieselben sind das Ergebnis der Untersuchung von insgesamt 858 500 Versicherten bei 21 deutschen Anstalten und je einer österreichischen und schweizerischen Gesellschaft und wurden im Jahre 1883 publiziert. Durch mehrfache Zerlegung des Materials wurden insgesamt 12 verschiedene Tafeln konstruiert, von denen nur jene 3 hervorgehoben werden sollen, welche aus ärztlich untersuchten Personen abgeleitet sind, und zwar

die Tafel MI für Männer
" " WI " Frauen und
" " MWI " Personen beiderlei Geschlechtes.

Die Deutsche Rentner-Sterbetafel beruht auf dem bis zum 31. Dezember 1889 reichenden Beobachtungsmaterial von 24 deutschen, 11 österreichischen und 3 schweizerischen Versicherungs-Gesellschaften, betreffend die bei ihnen versichert gewesenen 16 968 Rentner.

Die österreichisch-ungarischen Sterblichkeitstafeln (Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen und ungarischen Versicherten) sind das Resultat aus den während eines 25jährigen Zeitraumes (vom 1. Jänner 1876 bis 31. Dezember 1900) gesammelten Erfahrungen von 18 österreichischen, 3 ungarischen und 10 in Österreich, beziehungsweise Ungarn operierenden ausländischen Versicherungs-Gesellschaften und wurden in der Mitte des Jahres 1909 veröffentlicht. Das Gesamtmaterial der Tafel für Männer umfaßt 813 421, jenes der Frauentafel 129 500 Zählkarten. Außer der Trennung nach Geschlechtern wurden u. a. auch spezielle Tafeln für Todesfall- und solche für gemischte Versicherungen konstruiert.

Jede Versicherungs-Gesellschaft hält ihre Versicherten so lange in Evidenz, als die Verträge in Kraft stehen; eine Lösung derselben kann erfolgen entweder durch den Tod oder durch den Austritt des Versicherten bei Lebzeiten, worüber von jeder Anstalt ebenfalls Aufzeichnungen geführt werden. Auf Grund ihrer Aufschreibungen werden die an der Herstellung der Sterblichkeitstafel beteiligten Gesellschaften, nachdem sie sich vorerst auf einen bestimmten *Zähltag (Zähltermin)* geeinigt haben (bei den 23 deutschen Gesellschaften war dies der 31. Dezember 1875, bei den österreichisch-ungarischen Anstalten der 31. Dezember 1900), für jede bei ihnen vor und an dem Zähltermin versichert gewesene Person eine *Zählkarte* (oder einen *fish*) ausstellen (Personen, welche erst nach dem Zähltermin beigetreten sind, bleiben außer Betracht, hingegen sind jene einzubeziehen, welche am Zähltermin versichert waren und nachher ausgeschieden sind). Auf der Zählkarte sind insbesondere zu vermerken: Geburts-, Eintritts- und Austrittsdatum; an Stelle des letzteren ist bei den am Zähltermin vorhandenen Personen der Tag der Zählung einzusetzen. Aus diesen Daten wird das *Eintrittsalter* und die Dauer der Zugehörigkeit zur Anstalt *(Beobachtungsdauer)* bestimmt und auf den Zählkarten ersichtlich gemacht, welche sodann von den einzelnen Gesellschaften an eine gemeinsame Geschäftsstelle abgeliefert werden.

Um den Gang der nun folgenden *Zählung* verständlicher zu machen, sei vorerst daran erinnert, daß man beispielsweise für die Sterbenswahrscheinlichkeit des Alters 20 die Anzahl aller jener Personen benötigt, welche in irgend einem Kalenderjahr bei den Anstalten als 20-Jährige vorhanden waren und jene, welche von diesen im Alter zwischen 20 und 21 Jahren gestorben sind.

Es werden demnach sämtliche Zählkarten zuerst nach *Eintrittsaltern* geordnet; hierauf wird jeder dieser Päcke nach der *Beobachtungsdauer* zerlegt. Trennt man die *fishes* jeder einzelnen Beobachtungsdauer noch danach, ob der Versicherte während des betreffen-

den Beobachtungsjahres gestorben oder ausgetreten ist oder den Zähltermin erlebt hat, so kann man für jedes einzelne Beitrittsalter das folgende Formular in den Kolonnen 1 bis 4 ausfüllen.

Eintrittsalter 20.

Beobachtungsdauer	Anzahl der			Summe der	
	Gestorbenen	bei Lebzeiten Ausgeschiedenen	am Zähltermin Vorhandenen	Kolonnen 2 bis 4	Kolonne 5 von unten
1	2	3	4	5	6
0 bis 1 Jahr	${}_{20}\tau_0$	${}_{20}\lambda_0$	${}_{20}v_0$	${}_{20}l_0$	${}_{20}s_0$
1 „ 2 Jahre	${}_{20}\tau_1$	${}_{20}\lambda_1$	${}_{20}v_1$	${}_{20}l_1$	${}_{20}s_1$
2 „ 3 „	${}_{20}\tau_2$	${}_{20}\lambda_2$	${}_{20}v_2$	${}_{20}l_2$	${}_{20}s_2$
3 „ 4 „	${}_{20}\tau_3$	${}_{20}\lambda_3$	${}_{20}v_3$	${}_{20}l_3$	${}_{20}s_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Es bedeutet also beispielsweise ${}_{20}\tau_2$ die Anzahl jener Personen, welche als 20-Jährige eingetreten und im 3. Beobachtungsjahre gestorben, ${}_{20}\lambda_3$, welche im 4. Beobachtungsjahre freiwillig ausgetreten sind und ${}_{20}v_0$, welche als 20jahrig eingetreten sind und im Zeitpunkte der Zählung das 1. Jahr unter Beobachtung standen.

Sind diese Eintragungen für alle Eintrittsalter vollendet, dann benötigt man die Zählkarten nicht mehr. In jedem Formular wird nunmehr aus den Kolonnen 2, 3 und 4 die Horizontalsumme gebildet und in Kolonne 5 eingesetzt. Auf diese Art erhält man beispielsweise in ${}_{20}l_2$ die Anzahl jener Personen, welche mit 20 Jahren beigetreten sind und bei der Anstalt länger als 2 und kürzer als 3 Jahre versichert waren, sei es nun, daß sie im 3. Jahre entweder gestorben oder ausgetreten oder am Zähltermin lebend vorhanden sind. Nun addiert man Kolonne 5 von unten und setzt die bezüglichen Summen in Kolonne 6, so zwar, daß

$$\left.\begin{array}{l} {}_{20}s_0 = {}_{20}l_0 + {}_{20}l_1 + {}_{20}l_2 + {}_{20}l_3 + \cdots \\ {}_{20}s_1 = {}_{20}l_1 + {}_{20}l_2 + {}_{20}l_3 + \cdots \\ {}_{20}s_2 = {}_{20}l_2 + {}_{20}l_3 + {}_{20}l_4 + \cdots \end{array}\right\} \text{bis } {}_{20}l_n,$$

wobei n die längste Beobachtungsdauer des betreffenden Eintrittsalters vorstellt.

Bildet man nun den Quotienten $\frac{{}_{20}\tau_0}{{}_{20}s_0}$, so enthält derselbe im Nenner die Anzahl jener Personen, welche beobachtet wurden während 0 bis 1, 1 bis 2, 2 bis 3, ... Jahren, das sind überhaupt alle Personen, welche als 20-Jährige eingetreten sind und der Zähler die Anzahl der hievon im 1. Jahre Gestorbenen; der Quotient bedeutet

demnach die Wahrscheinlichkeit des 20-Jährigen, im 1. Versicherungsjahr zu sterben. Desgleichen ist $\frac{{}_{20}\tau_1}{{}_{20}s_1}$ die Wahrscheinlichkeit des 20-Jährigen, im 2. Versicherungsjahre zu sterben, denn ${}_{20}s_1$ sind alle Personen, welche mindestens 1 Jahr lang unter Beobachtung standen und ${}_{20}\tau_1$ jene, die nach 1jähriger Beobachtungsdauer gestorben sind. In analoger Weise erhielte man aus dem das Eintrittsalter 21 zur Darstellung bringenden Formular die Wahrscheinlichkeit des 21-Jährigen, im 1., im 2., im 3., ... im n^{ten} Jahre zu sterben.

Nunmehr macht man von der Hypothese Gebrauch, daß es gleichgiltig sei, ob z. B. der 20-Jährige im 3. oder der 21-Jährige im 2. oder der 25-Jährige im 1. Versicherungsjahre stirbt, weil es sich in allen drei Fällen um die Wahrscheinlichkeit des 22-Jährigen, im nächsten Jahre zu sterben, handle.

Zur Bildung dieser Durchschnittswerte überträgt man die Ziffern der Kolonnen 2 und 6 in folgende Summartabelle:

Eintrittsalter	Beobachtungsalter													
	20		21		22		23		24		25		26	
	Kol. 2	Kol. 6	Kol. 2	Kol. 6	Kol. 2	Kol. 6	Kol. 2	Kol. 6	Kol. 2	Kol. 6	Kol. 2	Kol. 6	Kol. 2	Kol. 6
20	${}_{20}\tau_0$	${}_{20}s_0$	${}_{20}\tau_1$	${}_{20}s_1$	${}_{20}\tau_2$	${}_{20}s_2$	${}_{20}\tau_3$	${}_{20}s_3$	${}_{20}\tau_4$	${}_{20}s_4$	${}_{20}\tau_5$	${}_{20}s_5$	${}_{20}\tau_6$	${}_{20}s_6$
21	d_{20}	l_{20}	${}_{21}\tau_0$	${}_{21}s_0$	${}_{21}\tau_1$	${}_{21}s_1$	${}_{21}\tau_2$	${}_{21}s_2$	${}_{21}\tau_3$	${}_{21}s_3$	${}_{21}\tau_4$	${}_{21}s_4$	${}_{21}\tau_5$	${}_{21}s_5$
22			d_{21}	l_{21}	${}_{22}\tau_0$	${}_{22}s_0$	${}_{22}\tau_1$	${}_{22}s_1$	${}_{22}\tau_2$	${}_{22}s_2$	${}_{22}\tau_3$	${}_{22}s_3$	${}_{22}\tau_4$	${}_{22}s_4$
23					d_{22}	l_{22}	${}_{23}\tau_0$	${}_{23}s_0$	${}_{23}\tau_1$	${}_{23}s_1$	${}_{23}\tau_2$	${}_{23}s_2$	${}_{23}\tau_3$	${}_{23}s_3$
24							d_{23}	l_{23}	${}_{24}\tau_0$	${}_{24}s_0$	${}_{24}\tau_1$	${}_{24}s_1$	${}_{24}\tau_2$	${}_{24}s_2$
									d_{24}	l_{24}	.	.	.	.

Hiebei bedeutet *Beobachtungsalter* das um die Beobachtungsdauer vermehrte Eintrittsalter; im übrigen sind die in dem früheren Formular in den Kolonnen 2 und 6 untereinander stehenden Werte hier nebeneinander angeordnet.

Fragen wir nun, welche Bedeutung beispielsweise den beim Beobachtungsalter 23 in den beiden Vertikalkolonnen eingesetzten Werten, beziehungsweise der Summe derselben: l_{23}, beziehungsweise d_{23} zukommt. — In Kolonne 6 sind verzeichnet alle im Alter

20 Beigetretenen, die mindestens 3 Jahre unter Beobachtung standen
21 „ „ „ 2 „ „ „ „
22 „ „ „ 1 „ „ „ „
23 „ „ kein ganzes Jahr „ „ „

demnach sämtliche Personen, welche überhaupt als 23-Jährige vorhanden waren. In Kolonne 2 sind enthalten die Anzahl der aus den

20-Jährigen nach 3 Jahren (im 4. Jahre) Gestorbenen,
21 „ „ 2 „ „
22 „ „ 1 Jahr „
23 „ im 1. Jahr der Beobachtung „

sohin insgesamt jene Personen, die zwischen den Altern 23 und 24 gestorben sind.

Die Werte d_{20}, d_{21}, d_{22} usf. geben also schon die Zähler und l_{20}, l_{21}, l_{22} usf. die Nenner der Sterbens-Wahrscheinlichkeiten des 20-, 21-, 22-Jährigen usw. Diese empirischen, noch ziemlich unregelmäßig verlaufenden Werte werden sodann behufs Erzielung eines möglichst gleichmäßigen Verlaufes noch entsprechend *ausgeglichen* und führen dann zu den endgiltigen Sterbenswahrscheinlichkeiten. Ein Vergleich derselben nach den vier erwähnten Sterblichkeitstafeln ist am Schlusse der Hilfs-Tabellen gegeben.

Will man nun beispielsweise aus den Sterbens-Wahrscheinlichkeiten der *Tafel der 23 deutschen Gesellschaften* die bezügliche Absterbeordnung ableiten, so hat man folgendermaßen vorzugehen:

Wird, wie dies allgemein geschieht, von einer runden, möglichst großen Anzahl von Lebenden (100 000) beim Anfangsalter ausgegangen, so ist

$$d_{20} = l_{20} \cdot q_{20} = 100\,000 \cdot 0{\cdot}00919 = 919, \text{ sohin}$$
$$l_{21} = l_{20} - d_{20} = 100\,000 - 919 = 99\,081.$$

Desgleichen folgt für

$$d_{21} = l_{21} \cdot q_{21} = 99\,081 \cdot 0{\cdot}00917 = 908 \text{ und}$$
$$l_{22} = l_{21} - d_{21} = 99\,081 - 908 = 98\,173 \text{ usf.}$$

Die in vorstehender Weise abgeleiteten Sterblichkeitstafeln heißen *Aggregat-* oder *Durchschnittstafeln* zum Unterschiede von sogenannten *Selekt-* oder *Auslesetafeln*, bei welchen die Sterbens-Wahrscheinlichkeiten nicht nur nach dem Alter, sondern auch nach Versicherungsdauern abgestuft sind. Tafeln der letzteren Art haben auch die österreichisch-ungarischen Versicherungs-Gesellschaften konstruiert, stehen aber derzeit in Österreich noch nicht in Verwendung, so daß von einer Besprechung derselben Umgang genommen wird.

Nunmehr wenden wir uns den einzelnen Versicherungskombinationen selbst zu.

a) Leibrenten-Versicherung.

§ 46.

Unmittelbare lebenslängliche Leibrenten.

Unter einer Leibrente versteht man eine periodisch wiederkehrende Zahlung an eine ganz bestimmte Person. Je nachdem das Bezugsrecht

erst mit dem Tode oder schon bei Erreichung eines bestimmten Alters endet, unterscheidet man *lebenslängliche* und *abgekürzte (temporäre)* Leibrenten und mit Beziehung auf die Fälligkeit der 1. Rate, ebenso wie bei den im § 12 besprochenen Zeitrenten, *unmittelbare* und *aufgeschobene* Leibrenten.

Nehmen wir an, eine x-jährige Person versichere eine jeweils am Jahresanfang im Betrage 1 lebenslänglich zahlbare Rente, dann wird sich der gegenwärtige Wert derselben folgendermaßen darstellen:

Die erste Rate im Betrage 1 ist sofort fällig; die Zahlung der 2. Rate findet nur dann statt, wenn die versicherte Person nach einem Jahre noch lebt. Hiefür besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ so daß sich der mathematische Hoffnungswert der 2. Zahlung darstellt als $\frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{r}$. Lebt die Person am Anfange des 3. Jahres — die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{l_{x+2}}{l_x}$ — so wird wieder der Betrag 1 fällig; sein Wert im Zeitpunkte des Vertragsabschlusses ist demnach $\frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{1}{r^2}$. In ganz analoger Weise sind die Hoffnungswerte der folgenden Zahlungen zu bilden, unter anderen auch der im Alter 99 fälligen Rate mit $\frac{l_{99}}{l_x} \cdot \frac{1}{r^{99-x}}$.

Das Alter 100 erlebt nach der auf S. 18 und 19 der Hilfs-Tabellen, Kol. 2 enthaltenen Sterbetafel keine Person mehr, sohin sind die Hoffnungswerte für die Alter von 100 aufwärts gleich Null. Der Wert der abzuleitenden Leibrente ist demnach

$$a_x = 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x \cdot r} + \frac{l_{x+2}}{l_x \cdot r^2} + \frac{l_{x+3}}{l_x \cdot r^3} + \ldots$$

usf., solange die Tabelle noch Lebende aufweist.

Setzt man $\frac{1}{r} = v, \frac{1}{r^2} = v^2, \ldots$ und multipliziert Zähler und Nenner jedes Summanden mit v^x, dann folgt

$$a_x = \frac{v^x \cdot l_x}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+1} \cdot l_{x+1}}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+2} \cdot l_{x+2}}{v^x \cdot l_x} + \ldots$$

Die Produkte

von der Form $v^x \cdot l_x$ bezeichnet man mit dem Symbol D_x,
„ „ „ $v^{x+1} \cdot l_{x+1}$ „ „ „ „ „ D_{x+1},
oder allgemein
von der Form $v^{x+m} \cdot l_{x+m}$ „ „ „ „ „ D_{x+m}

und nennt sie die (auf den Zeitpunkt der Geburt) *diskontierten Zahlen der Lebenden* (vom Alter x, beziehungsweise $x+1$ oder allgemein $x+m$). Man erhält dann für

$$a_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots}{D_x}$$

Die Summen von der Form

$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots$ (bis zum Schluß der Tabelle)

drückt man durch das Symbol N_x aus, beziehungsweise

$D_{x+m} + D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \cdots\cdots$ durch N_{x+m}

und nennt sie die *Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden* (vom Alter x, beziehungsweise $x+m$), so daß schließlich

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß auf die Größe des Resultates die Höhe des Zinsfußes einen erheblichen Einfluß ausübt. Denkt man sich in der 2. Gleichung Zähler und Nenner eines jeden Summanden durch v^x dividiert, dann verbleibt als gemeinsamer Nenner l_x, und v, beziehungsweise p kommt nur mehr in den Gliedern des Zählers vor. Je größer nun p angenommen wird, desto kleiner wird der Wert jedes Summanden und sohin auch von a_x; umgekehrt verursacht eine Verminderung des Zinsfußes eine Zunahme des Rentenwertes. Die österreichischen Versicherungs-Gesellschaften legen gegenwärtig ihren Berechnungen ausnahmslos einen Zinsfuß von 4 oder $3^1/_2\%$ zugrunde, jedoch obwaltet das Bestreben, allgemein zu letzterem überzugehen.

Auf Grund eines $3^1/_2\%$igen Zinsfußes ist auch die Kolonne 3 der *Deutschen Rentner-Sterbetafel* der Hilfs-Tabellen ermittelt, welche bei den zunächst folgenden Aufgaben verwendet wurde. Hinsichtlich der in den einzelnen Kolonnen enthaltenen Werte sei nur bemerkt, daß Kolonne 3 $\left(D_x = \frac{l_x}{r^x} = v^x \cdot l_x\right)$ durch Division der Zahlen aus Kolonne 2 durch die bezüglichen Potenzen von 1·035, beziehungsweise Multiplikation mit den entsprechenden Werten der Tabelle II

$$\left(\text{z. B. } D_{30} = \frac{l_{30}}{1{\cdot}035^{30}} = 0{\cdot}35627841 \,.\, 98\,199 = 34\,982\right)$$

erhalten und Kolonne 4 aus Kolonne 3 derart gebildet wurde, daß, vom höchsten Alter (99) ausgehend, zu den Werten von D_x immer der unmittelbar darüberstehende Wert hinzugezählt wurde, also

$N_{99} = D_{99} = 0{\cdot}19910$
$N_{98} = D_{98} + D_{99} = D_{98} + N_{99} = 1{\cdot}0990 + 0{\cdot}19910 = 1{\cdot}2981$
$N_{97} = D_{97} + D_{98} + D_{99} = D_{97} + N_{98} = 3{\cdot}1636 + 1{\cdot}2981 = 4{\cdot}4617$
$N_{96} = D_{96} + N_{97} = 6{\cdot}7326 + 4{\cdot}4617 = 11{\cdot}1943$ usf.

Welchen Wert repräsentiert eine lebenslänglich pränumerando im Betrage 1 zahlbare Leibrente eines 50-Jährigen?

$$\mathrm{a}_{50} = \frac{N_{50}}{D_{50}} = \frac{238\,213}{15\,536} = 15{\cdot}333.$$

Die Werte für a_x können den Hilfs-Tabellen (S. 18 und 19, letzte, beziehungsweise vorletzte Kolonne) unmittelbar entnommen werden.

In welcher Weise unterscheidet sich die *vorschüssige* Leibrente von der *nachschüssig zahlbaren?*

Bei der letzteren — dieselbe wird mit a_x bezeichnet — ist die erste Rate nach einem Jahre fällig, sofern der Versicherte lebt, die zweite Rate nach zwei Jahren usf., so daß

$$a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \cdots\cdots \text{ (bis zum Schluß der Tabelle)}$$

$$= \mathrm{a}_x - 1 = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots}{D_x} - 1 = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Nachdem auch beim Versicherungsvertrag die Leistung des Versicherten der Gegenleistung der Anstalt gleich sein muß, so wird der Wert der Leibrente auch jenes Entgelt darstellen, welches der Versicherungsnehmer der Anstalt für den Bezug dieser Rente zu entrichten hat und welches man *Prämie* nennt. Je nachdem diese einmalig oder während einer Reihe von Jahren bezahlt wird, spricht man von *Einmal-* und von *Jahresprämien.* Die sofort beginnende Leibrente kann natürlich nur gegen Einmalprämie versichert werden, da andernfalls Prämien- und Rentenzahlung gleichzeitig stattfänden.

Der 50-Jährige hätte demnach, um alljährlich bis zu seinem Tode eine Postnumerando-Rente von 1 K beziehen zu können, eine einmalige Einlage von 14·33 K zu leisten. Die Versicherungs-Gesellschaft kann sich jedoch mit dieser *rechnungsmäßigen* oder sogenannten *Nettoprämie* nicht zufrieden geben, sondern ist bemüßigt, behufs Deckung sowohl der mit dem Abschluß des Vertrages verbundenen Kosten als auch der laufenden Regie noch einen *Verwaltungskosten-Beitrag* oder *Regiezuschlag* einzuheben. Derselbe liegt zwar im Belieben der Anstalt, wird sich aber im allgemeinen ganz von selbst regulieren, denn ist er zu groß, so werden die hohen Prämien den Abschluß von Geschäften (die *Akquisition*) erschweren, ist er aber zu klein, so läuft die Anstalt Gefahr, einen *Regieverlust* zu erleiden.

Nehmen wir an, der Regiezuschlag betrage 10% der Nettoprämie, dann wird die vom 50-Jährigen effektiv zu entrichtende, um den Regiezuschlag vermehrte Nettoprämie, oder wie man sie kurzweg nennt,

die *Brutto-* oder *Tarifprämie*

$$14{\cdot}33 + 1{\cdot}43 = 15{\cdot}76\ K$$

ausmachen.

Welche Bruttoprämie hat ein 55-Jähriger für eine lebenslänglich im nachhinein zahlbare Leibrente von jährlich 1200 K zu leisten, wenn 12% Regie berechnet werden?

Die Nettoeinlage für die versicherte Rente „1" ist

$$a_{55} = \mathrm{a}_{55} - 1 = 12{\cdot}638\ K$$

hiezu 12% Zuschlag . . . . 1·517 „
sohin Bruttoprämie für die Rente „1" . . 14·155 K.

Nun ist folgender Kettensatz aufzustellen:

x K Prämie	kosten 1200 K Rente,
wenn 1 K Rente	14·155 K Prämie erfordert?

$$x = 16\,986{\cdot}-\ K.$$

Ein 63-Jähriger leistet für eine lebenslänglich postnumerando zahlbare Leibrente eine Einlage von 20 000 K. Wie groß ist die versicherte Rente bei 10%igem Zuschlag?

$$a_{63} = \frac{N_{64}}{D_{63}} = \frac{77\,184{\cdot}1}{7893{\cdot}5} = 9{\cdot}7782\ K$$

+ 10% 0·9778 „
Bruttoeinlage für 1 K Rente 10·7560 K.

Da jetzt nach der Rente gefragt wird, lautet der Kettensatz:

x K Rente	geben 20 000 K Einlage,
wenn 10·756 K Einlage	1 K Rente gewähren?

$$x = \frac{20\,000}{10{\cdot}756} = 1859{\cdot}43\ K.$$

Der 63-Jährige erhielte also in einer Rentenanstalt seine Einlage, die allerdings nicht zurückgezahlt wird, mit $\frac{185\,943}{20\,000} = 9{\cdot}297\%$ verzinst.

Es wäre natürlich unrichtig, die versicherte Rente etwa derart zu ermitteln, daß man von der Einlage den 10%igen Zuschlag in Abzug brächte und dann durch die Nettoprämie für die versicherte Rente „1" dividieren würde. Man erhielte in diesem Falle $\frac{20\,000 - 2000}{9{\cdot}7782} = 1840{\cdot}8\ K$. — Die Unrichtigkeit liegt darin, daß der Zuschlag 10% von der *Nettoprämie* ausmacht, die 20 000 K jedoch eine *Bruttoeinlage* vorstellen und 10% davon natürlich einem größeren Zuschlag als 10% gleichkommen. Will man das Resultat nicht aus der Brutto-, sondern aus der Nettoprämie (9·7782) ableiten, dann muß man vorerst die geleistete Einlage in die richtige Nettoeinlage überführen. Dieselbe resultiert aus der Gleichung

$$x + 0{\cdot}1\,x = 20\,000 \text{ mit } x = \frac{20\,000}{1{\cdot}1} = 18\,181{\cdot}81 \text{ und } \frac{18\,181{\cdot}81}{9{\cdot}7782} = 1859{\cdot}43.$$

§ 47.

Aufgeschobene und abgekürzte Leibrenten.

Ist die Rente „1" erstmalig k Jahre nach Vertragsabschluß und dann lebenslänglich in Intervallen von je einem Jahre zahlbar, so ist ihr gegenwärtiger Wert, beziehungsweise ihre Netto-Einmalprämie

$$_{k|}a_x{}^{*)} = \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k + \frac{l_{x+k+1}}{l_x} \cdot v^{k+1} + \frac{l_{x+k+2}}{l_x} \cdot v^{k+2} + \cdots$$
$$= \frac{v^{x+k} \cdot l_{x+k}}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+k+1} \cdot l_{x+k+1}}{v^x \cdot l_x} + \cdots = \frac{N_{x+k}}{D_x}.$$

Welche einmalige Einlage hat ein 40jähriger Mann für eine nach 20 Jahren beginnende und dann lebenslänglich zahlbare Leibrente von jährlich 1500 K unter Zugrundelegung eines $7^1/_2$%igen Regiezuschlages zu leisten?

$$_{20|}a_{40} = \frac{N_{60}}{D_{40}} = \frac{111\,786{\cdot}3}{23\,694} = 4{\cdot}7179\ K$$

	$+ 7^1/_2$%	0·3538 „
Bruttoprämie für	1 K Rente	5·0717 K
„ „	1500 „ „	7607·6 „

Die aufgeschobene Leibrente kann auch durch *jährliche Prämienzahlung* erworben werden, und zwar dergestalt, daß entweder während der ganzen oder nur während eines Teiles der Aufschubszeit (auch *Wartezeit* oder *Karenz)* alljährlich eine gleich große Prämie entrichtet wird. — Nehmen wir zunächst an, für eine nach k Jahren beginnende lebenslängliche Leibrente im Betrage 1 des x-Jährigen werde, und zwar wie dies bei jährlicher Prämienentrichtung stets der Fall ist, jeweils im vorhinein die Nettoprämie P_x während der ganzen Karenz bezahlt, dann stellt sich der Wert der Einzahlung des Versicherten dar durch

$$P_x + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot P_x \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot P_x \cdot v^2 + \cdots + \frac{l_{x+k-1}}{l_x} \cdot P_x \cdot v^{k-1}.$$

Hier ist die k^{te} und zugleich letzte Prämie zu Beginn des k^{ten} Versicherungsjahres fällig; die Wahrscheinlichkeit, daß der x-jährige Rentner in diesem Zeitpunkt noch lebt, ist $\frac{l_{x+k-1}}{l_x}$, sohin der Hoffnungswert der letzten Prämienzahlung $\frac{l_{x+k-1}}{l_x} \cdot P_x \cdot v^{k-1}$.

Die Leistung der Anstalt — eine *aufgeschobene Leibrente* — wird durch die Art der Prämienzahlung nicht beeinflußt, darum folgt

*) Vide Fußnote S. 36.

$$P_x\left(1 + \frac{v^{x+1} \cdot l_{x+1}}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+2} \cdot l_{x+2}}{v^x \cdot l_x} + \cdots + \frac{v^{x+k-1} \cdot l_{x+k-1}}{v^x \cdot l_x}\right) = \frac{N_{x+k}}{D_x},$$

beziehungsweise

$$P_x \cdot \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+k-1}}{D_x} = \frac{N_{x+k}}{D_x}.$$

Nun ist

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+k-1} + D_{x+k} + D_{x+k+1} + \cdots \text{ und}$$
$$N_{x+k} = \cdots\cdots = D_{x+k} + D_{x+k+1} + \cdots$$

sohin $N_x - N_{x+k} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+k-1}$ und

$$P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+k}}{D_x}, \text{ so daß schließlich}$$

$$P_x = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}.$$

Ist die Prämienzahlungsdauer $j < k$, dann wird sich P_x aus der Gleichung bestimmen

$$P_x \cdot \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+j-1}}{D_x} = \frac{N_{x+k}}{D_x} \text{ als}$$

$$P_x = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+j}}.$$

Ein 42jähriger Beamter leistet für eine mit dem vollendeten 65. Lebensjahr beginnende und dann bis zum Tode zahlbare jährliche Leibrente während der ganzen Aufschubszeit eine Jahresprämie von 300 K. Wie groß ist die versicherte Rente, wenn 15% Zuschlag in Anrechnung gebracht werden?

$$x = 42,\ k = j = 23,$$

$$P_{42} = \frac{N_{65}}{N_{42} - N_{65}} = \frac{69\,772{\cdot}9}{389\,993 - 69\,772{\cdot}9} = 0{\cdot}217891 \quad \text{Nettoprämie für die Einheit}$$

0·032684	15% Zuschlag
0·250575	jährliche Bruttoprämie für „1"

x K Rente	geben 300 K Jahresprämie,
wenn 0·250575 K Prämie	1 K Rente geben?

$$x = \frac{300}{0{\cdot}250575} = 1197{\cdot}25\ K.$$

Welche Prämie müßte der Beamte für dieselbe Rente bei der gleichen Anstalt durch 18 Jahre bezahlen?

$$P_{42} = \frac{N_{65}}{N_{42} - N_{60}} = \frac{69\,772{\cdot}9}{389\,993 - 111\,786{\cdot}3} = 0{\cdot}250795$$

0·037619	15% Zuschlag
0·288414	

x K Prämie | kosten 1197·25 K Rente,
wenn 1 K Rente | 0·288414 K Prämie erfordert?

$$x = 0·288414 \,.\, 1197·25 = 345·30\ K.$$

Es ist die einmalige Nettoprämie eines x-Jährigen für *eine durch n Jahre postnumerando zahlbare Leibrente von jährlich 1* zu bestimmen.

Die Mise dieser *temporären Leibrente* wird in analoger Weise zu ermitteln sein, wie der Wert der jährlichen Prämienzahlung bei der aufgeschobenen Leibrente, denn auch diese Einzahlungen stellen eine abgekürzte, allerdings im vorhinein zahlbare Rente im Betrage P_x vor. Demnach ist die zu suchende Einmalprämie

$$ {}_n a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \frac{l_{x+3}}{l_x} \cdot v^3 + \cdots\cdots + \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n $$

$$ = \frac{v^{x+1} \,.\, l_{x+1}}{v^x \,.\, l_x} + \frac{v^{x+2} \,.\, l_{x+2}}{v^x \,.\, l_x} + \cdots + \frac{v^{x+n} \,.\, l_{x+n}}{v^x \,.\, l_x} $$

$$ = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots\cdots + D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n-1}}{D_x} $$

Ein 60jähriger Mann leistet eine Einlage von 30 000 K und will dafür eine bis zum 85. Lebensjahre postnumerando zahlbare Leibrente erwerben. Wie groß ist dieselbe bei 10%igem Zuschlag?

$$ {}_{25}a_{60} = \frac{N_{61} - N_{86}}{D_{60}} = \frac{102\,365·1 - 1702·47}{9421·2} = 10·6847 $$

$$ \frac{1·0685 \quad 10\%\ \text{Zuschlag}}{} $$

$$ x = 30\,000 : 11·7532 = 2552·50\ K. $$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem auf S. 30 erhaltenen, so sieht man, daß der 60-Jährige für eine Einlage von 30 000 K eine durch 25 Jahre zahlbare Rente, und zwar in der Sparkasse im Betrage von 1820·22 K, bei einer Versicherungs-Gesellschaft aber im Betrage von 2552·50 K erhält.

Daß die Leistung der Sparkasse hinter jener der Rentenanstalt erheblich zurückstehen muß, ist auch unmittelbar einzusehen; denn stirbt beispielsweise der Rentner nach 5 Jahren, dann ist die Versicherungs-Gesellschaft jeder Verpflichtung ledig, die Sparkasse aber würde noch die um die 5 Raten à 1820·22 K verminderte Einlage zuzüglich der Zinsen, also mehr als 25 000 K auszufolgen haben.

Es entsteht nun die Frage, welches Alter müßte der Rentner mindestens erreichen, damit die Versicherung einer Leibrente für ihn vorteilhafter ist als die Sparkasseeinlage? Dies wird offenbar dann der Fall sein, wenn der Wert der auf den Zeitpunkt des Todes aufgezinsten Anstaltsleistungen gleich (oder größer) ist dem Werte der von der Sparkasse erhaltenen aufgezinsten Zahlungen zuzüglich des bei derselben noch aufrechten Guthabens.

Die bezügliche Bedingungsgleichung ist demnach:

$$ 2552·5 \left[r^{x-1} + r^{x-2} + r^{x-3} + \cdots\cdot + r + 1\right] \overline{\overline{>}} $$
$$ > 1820·22\,(r^{x-1} + r^{x-2} + r^{x-3} + \cdots + r + 1) + $$
$$ + 30\,000\, r^x - 1820·22\,(r^{x-1} + r^{x-2} + \cdots\cdot + r + 1), $$

$$ 2552·5 \frac{r^x - 1}{r - 1} \overline{\overline{>}} 30\,000\, r^x, $$

$$ \frac{2552·5}{30\,000} (r^x - 1) \overline{\overline{>}} (r - 1)\, r^x, $$

beziehungsweise

$$ 0·08508\, r^x - 0·08508 \overline{\overline{>}} 0·035\, r^x \text{ oder } r^x\,(0·08508 - 0·035) \overline{\overline{>}} 0·08508 $$

und hieraus folgt

$$ x \overline{\overline{>}} \frac{log\, 0·08508 - log\, 0·05008}{log\, 1·035} > 15·4. $$

Wenn also der 60-Jährige noch 16 oder mehr Jahre lebt, erscheint im gegebenen Falle ein Rentenvertrag vorteilhafter für ihn als eine Sparkasseeinlage.

§ 48.

Veränderliche Leibrenten.

Es ist der Wert einer mit dem Betrage K beginnenden, dann m-mal jährlich um δ ansteigenden und hierauf mit dem erreichten Maximalbetrag bis zum Tode zahlbaren nachschüssigen Leibrente zu bestimmen.

$$ (\mathrm{v}\, a_x) = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot K \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot (K + \delta) \,.\, v^2 + \frac{l_{x+3}}{l_x} (K + 2\,\delta) \,.\, v^3 + \cdots + $$
$$ + \frac{l_{x+m+1}}{l_x} (K + m\,\delta) \cdot v^{m+1} + \frac{l_{x+m+2}}{l_x} \cdot (K + m\,\delta) \cdot v^{m+2} + \cdots $$
$$ = [(K - \delta) + \delta] \cdot \frac{v^{x+1} \,.\, l_{x+1}}{v^x \,.\, l^x} + [(K - \delta) + 2\,\delta] \frac{v^{x+2} \,.\, l_{x+2}}{v^x \,.\, l_x} + \cdots $$
$$ \cdots + [(K - \delta) + (m + 1)\,\delta] \cdot \frac{v^{x+m+1} \,.\, l_{x+m+1}}{v^x \,.\, l_x} + $$
$$ + [(K - \delta) + (m + 1)\,\delta] \left[\frac{v^{x+m+2} \,.\, l_{x+m+2}}{v^x \,.\, l_x} + \right. $$
$$ \left. + \frac{v^{x+m+3} \,.\, l_{x+m+3}}{v^x \,.\, l_x} + \cdots\right] $$
$$ = (K - \delta) \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \cdots}{D_x} + $$
$$ + \delta \frac{D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + \cdots + m \cdot D_{x+m} + (m + 1)(D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \cdots)}{D_x} $$
$$ = \frac{(K - \delta)\, N_{x+1} + (m + 1)\,\delta\, N_{x+m+1} + \delta \cdot z}{D_x}, $$

wobei $\quad z = D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + 3\,D_{x+3} + \cdots + m\,D_{x+m}.$

Die Reihe kann auch durch folgende m horizontale Gleichungen dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
D_{x-1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_{x+m} &= N_{x+1} - N_{x+m+1} \\
D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_{x+m} &= N_{x+2} - N_{x+m+1} \\
D_{x+3} + \cdots + D_{x+m} &= N_{x+3} - N_{x+m+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
D_{x+m} &= N_{x+m} - N_{x+m+1} \\
\hline
z = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \cdots & + \\
+ N_{x+m} - m\, N_{x+m+1}. &
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man die Reihen von der Form

$N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \cdots$ mit S_{x+1} \} *Die Doppelsummen der*
oder $N_{x+m+1} + N_{x+m+2} + N_{x+m+3} + \cdots$ „ S_{x+m+1} \} *diskontierten Zahlen der Lebenden* (vom Alter $x+1$, beziehungsweise $x+m+1$), dann ist

$$N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \cdots + N_{x+m} = S_{x+1} - S_{x+m+1}, \text{ so daß}$$

$$(\mathrm{v}\, a_x) = \frac{(K - \delta)\, N_{x+1} + (m+1)\,\delta\, N_{x+m+1} + \delta(S_{x+1} - S_{x+m+1} - m N_{x+m+1})}{D_x}$$

$$= \frac{(K - \delta)\, N_{x+1} + \delta\,(S_{x+1} - S_{x+m+1} + N_{x+m+1})}{D_x} \text{ und da}$$

$$\underbrace{N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \cdots + N_{x+m}}_{S_{x+1} - S_{x+m+1}} + N_{x+m+1} = S_{x+1} - S_{x+m+2}$$

ist schließlich

$$(\mathrm{v}\, a_x) = \frac{(K - \delta)\, N_{x+1} + \delta\,(S_{x+1} - S_{x+m+2})}{D_x}.$$

Bemerkt sei nur, daß die Kolonne der S_x (vorletzte Kolonne auf S. 18 und Fortsetzung auf S. 19 der Hilfs-Tabellen) in derselben Weise aus Kolonne 4 gebildet ist, wie diese aus Kolonne 3.

Ein 35jähriger Kaufmann versichert sich zum Zwecke der Altersversorgung auf eine mit dem vollendeten 60. Lebensjahr beginnende, bis zu seinem Tode jährlich im vorhinein zahlbare konstante Leibrente und entrichtet an Prämien im 1. Versicherungsjahr 100 K und in jedem folgenden Jahre um 25 K mehr. Wie groß ist bei einem 10%igen Regiezuschlag die versicherte Rente?

In diesem Falle stellen die Einzahlungen des Versicherten eine *steigende Rente* vor, welche sich aber von der vorstehend abgeleiteten nach zweifacher Richtung unterscheidet; sie ist nämlich im vorhinein zahlbar und bricht mit dem erreichten Maximum ab. Ihr Wert wird sich also folgendermaßen darstellen:

$$100 + \frac{l_{36}}{l_{35}}(100 + 25)\, v + \frac{l_{37}}{l_{35}}(100 + 2 \,.\, 25)\, v^2 + \cdots + \frac{l_{59}}{l_{35}}(100 + 24 \,.\, 25)\, v^{24}$$

$$= 100\left(1 + \frac{l_{36}}{l_{35}} \cdot v + \frac{l_{37}}{l_{35}} \cdot v^2 + \cdots + \frac{l_{59}}{l_{35}} \cdot v^{24}\right) +$$

$$+ 25\left(\frac{l_{36}}{l_{35}} \cdot v + 2\,\frac{l_{37}}{l_{35}} \cdot v^2 + 3\,\frac{l_{38}}{l_{35}}\, v^3 + \cdots + 24\,\frac{l_{59}}{l_{35}} \cdot v^{24}\right)$$

$$= 100\,\frac{N_{35} - N_{60}}{D_{35}} + 25\,\frac{S_{36} - S_{60} - 24\, N_{60}}{D_{35}}.$$

Wären nicht die Brutto-, sondern die Nettoprämien gegeben, dann könnte man diesen Ausdruck unmittelbar dem Werte der versicherten Rente gleich setzen; im Hinblicke auf den 10%igen Zuschlag (Bruttoprämie = 1·1fache Nettoprämie) lautet jedoch, wenn x den Betrag der Rente vorstellt, die bezügliche Gleichung:

$$\frac{100\,(N_{35} - N_{60}) + 25\,(S_{36} - S_{60} - 24\, N_{60})}{1{\cdot}1\, D_{35}} = x \cdot \frac{N_{60}}{D_{35}} \text{ und hieraus ist}$$

$$x = \frac{100\,(N_{35} - N_{60}) + 25\,(S_{36} - S_{60} - 24\, N_{60})}{1{\cdot}1\, N_{60}}$$

$$= \frac{100\,(570040 - 111786{\cdot}3) + 25\,(8181870 - 1012932 - 24 \,.\, 111786{\cdot}3)}{1{\cdot}1 \,.\, 111786}$$

$$= 1284{\cdot}74\ K.$$

§ 49.

Leibrenten mit unterjähriger Zahlung.

Ist die **nachschüssige** Leibrente „1" nicht in jährlichen, sondern in m unterjährigen Raten à $\frac{1}{m}$ zahlbar, dann kann man sich dieselbe in m aufgeschobene Leibrenten zerlegt denken und erhält als Barwert (Einmalprämie):

$$
\begin{aligned}
a_x^{(m)} &= \frac{1}{m} \cdot {}_{\frac{1}{m}|}a_x + \frac{1}{m} \cdot {}_{\frac{2}{m}|}a_x + \cdots + \frac{1}{m} \cdot {}_{\frac{m}{m}|}a_x \\
&= \frac{1}{m}\,\frac{N_{x+\frac{1}{m}} + N_{x+\frac{2}{m}} + \cdots + N_{x+\frac{m}{m}}}{D_x} \\
&= \frac{1}{m}\,\frac{N_x + N_{x+\frac{1}{m}} + N_{x+\frac{2}{m}} + \cdots + N_{x+1} - N_x}{D_x}.
\end{aligned}
$$

Unter der Annahme, daß die zwischen N_x und N_{x+1} liegenden Werte eine arithmetische Reihe vorstellen — die Summe aus n Gliedern einer solchen ist $(a_1 + a_n)\frac{n}{2}$ —, geht die frühere Gleichung über in

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\,\frac{(N_x + N_{x+1}) \cdot \frac{m+1}{2} - N_x}{D_x} = \frac{m+1}{2m} \cdot a_x + \frac{m+1}{2m} \cdot a_x - \frac{1}{m}\, a_x$$

$$= a_x \cdot \frac{m-1}{2m} + \frac{m+1}{2m}\,(a_x - 1) = a_x - \frac{m+1}{2m}.$$

Die in m unterjährigen Raten zahlbare vorschüssige Leibrente ist naturgemäß

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \frac{1}{m} = \mathrm{a}_x - \frac{m+1}{2\,m} + \frac{1}{m} = \mathrm{a}_x - \frac{m-1}{2\,m}.$$

Es ist demnach der Barwert der jährlichen vorschüssigen Leibrente „1" zu vermindern, und zwar

bei	halbjähriger ($m = 2$)	vierteljähriger ($m = 4$)	monatlicher ($m = 12$)
	Ratenzahlung		
vorschüssiger Zahlung	um 0·25	0·375	0·458$\dot{3}$
nachschüssiger „	„ 0·75	0·625	0·541$\dot{6}$

Wie groß ist der Barwert einer in monatlichen Nachhinein-Raten zahlbaren lebenslänglichen Leibrente von jährlich 1200 K eines 5-Jährigen?

$$(13{\cdot}638 - 0{\cdot}542)\,1200 = 15\,715\ K.$$

---

b) Kapitalversicherung.

§ 50.

Erlebensversicherung.

Der Unterschied zwischen Renten- und Kapitalversicherung liegt darin, daß es sich bei der ersteren um eine periodisch wiederkehrende, bei der letzteren aber nur um eine einmalige (ausnahmsweise auch um eine zweimalige) Auszahlung eines bestimmten versicherten Betrages handelt.

Eine *Erlebensversicherung* oder *Kapitalversicherung auf den Erlebensfall* liegt dann vor, wenn der Versicherungsnehmer gegen eine einmalige oder jährliche Prämie *das Recht auf ein bestimmtes Kapital für den Fall* erwirbt, *daß er ein von vornherein festgesetztes Alter erreicht.* Der Wert einer solchen, von einem x-Jährigen auf das Alter $x + n$ abgeschlossenen Versicherung im Betrage 1 wird sich darstellen als

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}\cdot v^n = \frac{v^{x+n}\,.\,l_{x+n}}{v^x\,.\,l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Welche Einmalprämie hat ein 25-Jähriger für eine Erlebensversicherung auf das 55. Lebensjahr im Betrage von 2000 K zu erlegen, wenn 10% Zuschlag berechnet werden?

$${}_{30}E_{25} = \frac{D_{55}}{D_{25}} = \frac{12\,265}{42\,315} = 0{\cdot}2899\ K$$

	$+\ 10\%$	0·0290 „
Bruttoprämie für 1 K vers. Kapital . . .		0·3189 K
„ „ 2000 „ „ „		637·80 „

Eine 33jährige Person entrichtet durch 27 Jahre für eine Erlebensversicherung auf das 60. Lebensjahr eine jährliche Prämie von 100 K. Welches versicherte Kapital erwirbt sie hiedurch, wenn 12% Zuschlag in Anrechnung gebracht werden?

Wird die Versicherung, wie im vorliegenden Falle, gegen Jahresprämien abgeschlossen, so empfiehlt es sich, von jener Grundgleichung auszugehen, welche den Wert der Leistung der Anstalt und der Einzahlung des Versicherten zur Darstellung bringt.

Die Verpflichtung der Anstalt, einer beim Vertragsabschlusse 33jährigen Person bei vollendetem 60. Lebensjahr, d. i. 27 Jahre nach dem Versicherungsbeginn 1 K zu bezahlen, repräsentiert den Wert ${}_{27}E_{33}$. Die Gegenleistung des Versicherten besteht in der 27mal am Jahresanfang zu entrichtenden Nettoprämie P_{27}. Hätte er jährlich den Betrag 1 abzustatten, so würde diese Leistung den Wert ${}_{|27}\mathrm{a}_{33}$ darstellen; da aber P_{27} entrichtet wird, ist der Wert der Prämienzahlungen $P_{33}\,.\,{}_{|27}\mathrm{a}_{33}$. Somit lautet für die versicherte Summe „1" die Grundgleichung

$${}_{27}E_{33} = P_{33}\,.\,{}_{|27}\mathrm{a}_{33}$$

oder

$$\frac{D_{60}}{D_{33}} = P_{33}\cdot\frac{N_{33}-N_{60}}{D_{33}},\ \text{so daß}$$

$$P_{33} = \frac{D_{60}}{N_{33}-N_{30}} = \frac{9421{\cdot}2}{631\,205 - 111\,786{\cdot}3} = 0{\cdot}018138$$

$$\underline{0{\cdot}002178}\quad 12\%\ \text{Zuschlag}$$

$$x = 100 : 0{\cdot}020315 = 4922{\cdot}50\ K.$$

Würden die 100 K alljährlich in die Sparkasse gelegt, dann würde (bei 3½%iger Verzinsung) am Schlusse des 27. Jahres das Guthaben

$$100\,.\,\mathrm{T\,III}_{3^1/_2}^{(27} = 4529{\cdot}06\ K$$

betragen.

§ 51.

Todesfallversicherung.

Bei der *Todesfallversicherung* oder *Versicherung auf den Ablebensfall* erwirbt der Versicherungsnehmer durch eine einmalige oder jährliche Prämienzahlung *das Recht, daß bei seinem Tode ein von vornherein bestimmtes Kapital zur Auszahlung gelangt.*

Nehmen wir an, daß alle beim Alter x in der Sterblichkeitstafel verzeichneten Personen die Todesfallversicherung abschließen und A_x die Einmalprämie eines dieser Versicherten vorstellt, dann erhält die Anstalt insgesamt an Prämien $l_x . A_x$ und hat dafür den Hinterbliebenen der in den folgenden Jahren Sterbenden je den Betrag 1 auszubezahlen.

Wenn $d_x = l_x - l_{x+1}$, $d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}, \ldots$ die Zahl der Sterbefälle zwischen den Altern x und $x+1$, beziehungsweise $x+1$ und $x+2, \ldots$ bedeutet und wir annehmen, daß das versicherte Kapital stets am Ende jenes Versicherungsjahres ausbezahlt wird, in welchem der Tod eingetreten ist, dann ergibt sich als Wert der auf den Zeitpunkt des Vertragsabschlusses diskontierten Anstaltszahlungen

$$v . d_x + v^2 . d_{x+1} + v^3 . d_{x+2} + \cdots$$

und diese müssen gleich sein den vereinnahmten Prämien $l_x . A_x$; somit ist

$$A_x = \frac{v . d_x}{l_x} + \frac{v^2 . d_{x+1}}{l_x} + \frac{v^3 . d_{x+2}}{l_x} + \cdots$$
$$= \frac{v^{x+1} . d_x + v^{x+2} . d_{x+1} + v^{x+3} . d_{x+2} + \cdots}{v^x . l_x}.$$

Setzt man nun die Ausdrücke

$$v^{x+1} . d_x = C_x$$
beziehungsweise $v^{x+m+1} . d_{x+m} = C_{x+m}$ *(diskontierte Zahl der Toten)*

und $C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots = M_x$
beziehungsweise
$C_{x+m} + C_{x+m+1} + C_{x+m+2} + \cdots = M_{x+m}$ *(Summe der diskontierten Zahlen der Toten)*

dann folgt für

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man natürlich, wenn man nur einen Versicherungsvertrag ins Auge faßt und die Sterbens-Wahrscheinlichkeiten in Rechnung zieht:

Der Tod des x-jährigen Versicherten kann entweder im 1. oder im 2. oder im 3. oder in irgend einem der folgenden Versicherungsjahre erfolgen. Die Wahrscheinlichkeit,

daß der x-Jährige im 1. Jahre stirbt, ist $\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$,

" " " " 2. " " " $\frac{d_{x+1}}{l_x}$ usw.,

somit der mathematische Hoffnungswert für die Zahlung des Kapitales 1 im 1. Jahre $\frac{d_x}{l_x r}$, für die Zahlung im 2. Jahre $\frac{d_{x+1}}{l_x r^2}$ usf., so daß schließlich wie oben

$$A_x = \frac{d_x}{l_x r} + \frac{d_{x+1}}{l_x r^2} + \frac{d_{x+2}}{l_x r^3} + \cdots$$

Der Wert der Todesfallversicherung läßt sich aber auch durch jenen der Leibrente ausdrücken, denn es ist

$$A_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x r} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x r^2} + \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_x r^3} + \cdots$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{l_x}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x r} + \frac{l_{x+2}}{l_x r^2} + \cdots\right) - \left(\frac{l_{x+1}}{l_x r} + \frac{l_{x+2}}{l_x r^2} + \frac{l_{x+3}}{l_x r^3} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{r} \mathrm{a}_x - a_x = \frac{1}{r} \mathrm{a}_x - (\mathrm{a}_x - 1) = 1 - \frac{r-1}{r} \mathrm{a}_x.$$

Setzen wir noch $\frac{r-1}{r} = d$, so ist schließlich

$$A_x = 1 - d . \mathrm{a}_x.$$

Bei einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}\%$ ist $d = \frac{0{\cdot}035}{1{\cdot}035} = 0{\cdot}03381643$,

demnach $A_x = 1 - 0{\cdot}03381643\, \mathrm{a}_x$.

Zu der Formel

$$1 = A_x + v . \frac{p}{100} \mathrm{a}_x$$

könnte man auch durch folgende Überlegung gelangen: Wollte der x-Jährige, daß bei seinem Tode seinen Erben lediglich 1 K ausgezahlt wird, so hätte er dafür nur den Betrag A_x zu erlegen; will er aber die Summe 1 aufwenden, dann kann er damit nicht nur diese nach seinem Tode seinen Erben sichern, sondern auf Lebenszeit auch noch jährlich im vorhinein die (auf den Jahresanfang diskontierten) Zinsen davon im Betrage von $\frac{p}{100} . v$ genießen.

Bevor diese Formeln auf einen praktischen Fall angewendet werden, erscheint es notwendig, mit einigen Worten auf die Sterblichkeitstafel hinzuweisen, welche den folgenden Aufgaben zugrunde gelegt ist.

Es ist wohl ohne weiteres klar, daß Renten- und Erlebens-Versicherungen nur solche Personen abschließen werden, welche sich vollkommen gesund fühlen. Dagegen werden eine Todesfallversicherung einzugehen alle jene Personen bestrebt sein, welche im Falle ihres Todes ihren Angehörigen ein Kapital sichern wollen, gleichgiltig, ob sich diese Versicherungswerber im Zeitpunkte des Vertragsabschlusses gesund fühlen oder nicht. Es ist daher nur ein Gebot der Vorsicht,

daß jede Anstalt diese Versicherungswerber ärztlich untersuchen läßt und nicht gesunde Personen ablehnt. Aber selbst bei der genauesten ärztlichen Untersuchung wird oft ein in den Anfangsstadien befindliches Leiden nicht konstatierbar sein. Die Folge davon ist, daß die auf den Todesfall Versicherten eine andere, nämlich größere Sterblichkeit aufweisen als die Rentner und demnach auch für beide Gruppen von Versicherten getrennte Absterbeordnungen verwendet werden. Liegt es doch im Interesse der Gesellschaften, für die Todesfallversicherungen eine möglichst *strenge Tafel,* also eine solche mit großen Sterbens-Wahrscheinlichkeiten zu verwenden — wenn dann ihre Versicherten minder rasch absterben, resultiert für die Gesellschaft ein *Sterblichkeitsgewinn* —, für die Rentner aber eine Tafel mit möglichst geringen Sterbens-Wahrscheinlichkeiten in Anwendung zu bringen, denn wenn die eigenen Versicherten länger leben würden, als sie nach der benützten Tafel leben sollten, würde die Anstalt einen *Sterblichkeitsverlust* erleiden.

Aus diesen Gründen sind die folgenden Aufgaben nicht nach der *Deutschen Rentner-Sterbetafel,* sondern nach der *österreichisch-ungarischen Sterblichkeits-Tafel* (ebenfalls unter Zugrundelegung eines Zinsfußes von $3^1/_2$%, S. 28 und 29 der Hilfstabellen) berechnet.

Wie groß ist die einmalige Bruttoprämie für eine Todesfallversicherung im Betrage von 3000 K für einen 25-Jährigen bei 10%igem Zuschlag?

$$A_{25} = \frac{M_{25}}{D_{25}} = \frac{12\,644{\cdot}05}{41\,524} = 0{\cdot}30450$$

$$\underline{0{\cdot}03045 \quad 10\%}$$

$$x = 0{\cdot}33495 \,.\, 3000 = 1004{\cdot}85\,K.$$

Nach der Rentenformel ergibt sich als Nettoeinlage ebenfalls

$$A_{25} = 1 - 0{\cdot}03381643 \,.\, 20{\cdot}567 = 0{\cdot}30450.$$

Hiebei ist, da es sich um keine Rentenversicherung handelt, der Wert der Leibrente natürlich nicht der Rentner-, sondern der Todesfalltafel (AH^M $3^1/_2$%) entnommen.

Bei dieser Gelegenheit sei auf die Verschiedenheit der Leibrentenwerte beider Tafeln verwiesen. Die Werte nach der Todesfalltafel sind wegen des rascheren Absterbens des derselben zugrunde liegenden Beobachtungsmateriales naturgemäß durchwegs kleiner als jene nach der Rentner-Sterbetafel.

Die bisherige Ableitung war unter der Annahme durchgeführt worden, daß die Auszahlung der versicherten Summe erst am Schlusse des Sterbejahres erfolge. Tatsächlich geschieht dies aber in der Praxis nicht, sondern das Kapital wird den Anspruchsberechtigten ausgefolgt, sobald die Todesfalldokumente (Totenschein, Tauf- oder Geburtsschein, wenn das Geburtsdatum nicht schon früher authen-

tisch nachgewiesen worden ist, die letzte Prämienquittung und eventuell auch ein Zeugnis des behandelnden Arztes) in Ordnung befunden wurden. Dies kann unter Umständen vielleicht schon wenige Tage nach eingetretenem Tode sein, es kann aber auch vielleicht Wochen, Monate, ja sogar Jahre dauern.

Diese Eventualitäten können in der Prämienermittlung natürlich nicht in exakter Weise Berücksichtigung finden. Wohl aber entsteht die Frage, in welcher Weise sich der Wert der nach der früheren Methode berechneten Einmalprämie ändern würde, wenn die versicherte Summe etwa sofort am Sterbetage zur Auszahlung käme.

Wird angenommen — und das ist offenbar zulässig — daß sich die Todesfälle ziemlich gleichmäßig über das ganze Versicherungsjahr verteilen, so kann man sich die Liquidierung aller Zahlungen eines Jahres in die Mitte desselben verlegt denken und erhält als Wert dieser Versicherung

$$\bar{A}_x = \frac{d_x}{l_x \,.\, r^{\frac{1}{2}}} + \frac{d_{x+1}}{l_x \,.\, r^{\frac{3}{2}}} + \frac{d_{x+2}}{l_x \,.\, r^{\frac{5}{2}}} + \ldots$$

$$= r^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_x}{l_x r} + \frac{d_{x+1}}{l_x \,.\, r^2} + \frac{d_{x+2}}{l_x \,.\, r^3} + \ldots\right)$$

$$= r^{\frac{1}{2}} \,.\, A_x = \sqrt{r} \,.\, A_x.$$

Es zeigt sich also, daß, wie wohl selbstverständlich, $\bar{A}_x$ größer ist als A_x, und zwar, da $\sqrt{1{\cdot}04} = 1{\cdot}0198$ und $\sqrt{1{\cdot}035} = 1{\cdot}0173$, bei 4%igen Rechnungsgrundlagen um nicht ganz 2% und bei $3^1/_2$%igen Grundlagen um nicht ganz $1^3/_4$%. Diese an sich unbedeutenden, durch die Wahl des Regiezuschlages übrigens leicht ausgleichbaren Unterschiede rechtfertigen wohl hinlänglich die in der Praxis zumeist angewendete einfachere erste Methode der Berechnung.

Bei der gegen *lebenslängliche Prämienzahlung* abgeschlossenen Todesfallversicherung stellen die Einzahlungen des Versicherten eine lebenslängliche Leibrente im Betrage der Jahres-Nettoprämie P_x dar, wogegen die Leistung der Anstalt gegen früher ungeändert bleibt. Ein 32jähriger Mann will bis zu seinem Tode für eine Ablebensversicherung eine jährliche Prämie von 120 K entrichten. Welches Kapital erhält er versichert, wenn die Anstalt 20%*) Regiezuschlag berechnet?

Die Grundgleichung — Wert der Anstaltsleistung gleich dem Werte der Prämien — lautet für diesen Fall

$$A_{32} = P_{32} \,.\, a_{32}.$$

*) Der Regiezuschlag ist für Todesfallversicherungen — namentlich bei jährlicher Prämienzahlung — im allgemeinen wesentlich größer als bei Renten- und Erlebensversicherungen.

Hieraus läßt sich P_{32} auf zweifache Weise bestimmen, und zwar entweder unter Benützung des Wertes der Leibrente, wonach

$$1 - d \,.\, a_{32} = P_{32} \,.\, a_{32}$$

$$\text{und } P_{32} = \frac{1}{a_{32}} - 1,$$

oder mittels der diskontierten Zahlen, so daß

$$\frac{M_{32}}{D_{32}} = P_{32} \,.\, \frac{N_{32}}{D_{32}} \text{ und}$$

$$P_{32} = \frac{M_{32}}{N_{32}} = \frac{11\,426{\cdot}94}{594\,638} = 0{\cdot}0192116$$

$$\underline{0{\cdot}0038433} \quad 20\% \text{ Zuschlag}$$

$$x = 120 : 0{\cdot}0230599 = 5204\ K.$$

Es ist ersichtlich, daß, wenn der Versicherte 44 oder mehr Prämien entrichtet, er also 76 Jahre oder älter wird, er einen größeren Betrag an die Anstalt bezahlt, als diese bei seinem Tode zu leisten hat. Dieser Gefahr entgeht der Versicherungsnehmer, wenn er die

Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung

abschließt, also die Jahresprämie nicht lebenslänglich, sondern nur durch eine bestimmte Zeit (n Jahre) leistet.

Ein 28-Jähriger schließt eine Todesfallversicherung auf 15 000 K gegen Prämienzahlung bis zum 60. Lebensjahr ab ($n = 32$) und hat hiefür eine jährliche Prämie von 340 K (sohin insgesamt höchstens 10 880 K) zu bezahlen. Welcher Regiezuschlag wurde in diesem Falle in Anrechnung gebracht?*)

Die Grundgleichung für diese Aufgabe lautet

$$A_{28} = P_{28} \,.\, {}_{|32}a_{28}$$

$$\text{oder } \frac{M_{28}}{D_{28}} = P_{28} \,.\, \frac{N_{28} - N_{60}}{D_{28}}, \text{ weshalb}$$

$$P_{28} = \frac{M_{28}}{N_{28} - N_{60}} = \frac{12\,130{\cdot}40}{734\,104 - 78\,662{\cdot}7}$$

$= 0{\cdot}0185072$	Nettoprämie für	1 K
277·61 K	„ „	15 000 K
340·— K	Bruttoprämie „	15 000 K
62·39 K	absoluter Zuschlag und	

$$\text{Zuschlag in Prozenten der Nettoprämie } x = \frac{6239}{277{\cdot}61} = 22{\cdot}5\%.$$

Aufgeschobene und abgekürzte Todesfallversicherung.

Es kann im Versicherungsvertrag auch bestimmt werden, daß *das versicherte Kapital nur dann ausbezahlt wird, wenn der Tod erst*

*) Siehe Beispiel S. 25.

nach Ablauf einer bestimmten Wartezeit (Karenz) eintritt; stirbt der Versicherte während dieser Frist, dann ist ein Anspruch auf das versicherte Kapital nicht vorhanden.

Eine solche *aufgeschobene Todesfallversicherung* wird in der Regel dann abgeschlossen, wenn seitens der Anstalt auf eine ärztliche Untersuchung des Versicherungswerbers verzichtet wird, z. B. bei der sogenannten *Volksversicherung*. Das Charakteristische dieser Versicherungsform besteht darin, daß die Prämien in kleinen Wochen- oder Monatsraten bezahlt werden und die versicherte Summe einen ziemlich niedrig bemessenen Betrag (gewöhnlich 2000 K) nicht übersteigen darf.

Ist die *Karenz* mit k Jahren bemessen, so wird das Kapital „1" fällig, wenn der Tod im 1., im 2.,... oder in einem der folgenden Jahre *nach Ablauf der k Jahre* eintritt; der Wert der Versicherung wird sich demnach darstellen als

$${}_{k|}A_x = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} \,.\, v^{k+1} + \frac{l_{x+k+1} - l_{x+k+2}}{l_x} \,.\, v^{k+2} + \ldots.$$

$$= \frac{v^{x+k+1} \,.\, d_{x+k}}{v^x \,.\, l_x} + \frac{v^{x+k+2} \,.\, d_{x+k+1}}{v^x \,.\, l_x} + \ldots.$$

$$= \frac{C_{x+k} + C_{x+k+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_{x+k}}{D_x}.$$

Wird diese Versicherung gegen Jahresprämien abgeschlossen, so lautet die Grundgleichung

im Falle lebenslänglicher Prämienzahlung

$${}_{k|}A_x = P_x \,.\, a_x$$

und bei n jähriger Prämienzahlung

$${}_{k|}A_x = P_x \,.\, {}_{|n}a_x.$$

Ist die Auszahlung des versicherten Kapitales davon abhängig gemacht, daß der Tod innerhalb einer bestimmten Zeit eintritt, dann nennt man die Todesfallversicherung abgekürzt oder temporär.

Die Versicherungssumme wird fällig, wenn der Versicherte entweder im 1. oder im 2.... oder im n^{ten} Jahre nach Vertragsabschluß stirbt; demnach ist

$${}_{|n}A = \frac{d_x}{l_x} \,.\, v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \,.\, v^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \,.\, v^n$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Die für diese Versicherungskombination während der ganzen Vertragsdauer zu zahlende Jahresprämie bestimmt sich aus der Gleichung

$$_{|n}A_x = P_x \, _{|n}a_x$$

und die nur m-mal zu entrichtende Prämie aus

$$_{|n}A_x = P_x \, . \, _{|m}a_x.$$

Ein 40jähriger Beamter benötigt als Sicherstellung für ein in 12 Jahren zurückzuzahlendes Darlehen von 5000 K eine Polizze über eine auf die Dauer der Kapitalsrückzahlung abgekürzte Todesfallversicherung im Betrage des Darlehens. Welche Monatsprämie hat er hiefür zu entrichten, wenn der jährlichen Bruttoprämie ein Regiezuschlag von 25%*) zugrunde liegt und für die monatliche Prämienzahlung ein spezieller Zuschlag von 5% in Anrechnung kommt?

Zunächst soll in der bisherigen Weise die jährliche Bruttoprämie ermittelt werden.

Aus der Grundgleichung

$$_{|12}A_{40} = P_{40} \, . \, _{|12}a_{40}$$

oder $\dfrac{M_{40} - M_{52}}{D_{40}} = P_{40} \, . \, \dfrac{N_{40} - N_{52}}{D_{40}}$ folgt für

$$P_{40} = \frac{M_{40} - M_{52}}{N_{40} - N_{52}} = 0 \cdot 012731$$

$$\underline{0 \cdot 003183} \quad 25\%$$

eine jährliche Bruttoprämie von $0 \cdot 015914 \, . \, 5000 = 79 \cdot 57 \; K.$

Um nun hieraus die verlangte Monatsrate berechnen zu können, muß vorausgeschickt werden, daß alle Anstalten den Versicherten das Recht einräumen, die am Anfang jedes Versicherungsjahres fällige Prämie gegen eine separate Vergütung für Zinsverlust und vermehrte Verwaltungskosten in *unterjährigen Raten*, d. h. halb- oder vierteljährig, mitunter auch monatlich zu entrichten. Es wird dann die Jahres-Bruttoprämie noch um einen speziellen Zuschlag erhöht — derselbe ist bei den einzelnen Anstalten verschieden, beträgt aber für Semesterzahlung ungefähr 2%, bei Quartalsraten 3 bis 4% und bei monatlicher Abstattung 5 bis 6% der Bruttoprämie — und von diesem erhöhten Betrag hat dann der Versicherte die Hälfte, beziehungsweise 1/4 oder 1/12 zu bezahlen.

Im vorliegenden Falle wäre demnach durch 144 Monate im vorhinein eine Prämie von $(79 \cdot 57 + 79 \cdot 57 \, . \, 0 \cdot 05) : 12 = 6 \cdot 96$ zu entrichten.

Bemerkt sei noch, daß, im Falle der Tod während des Versicherungsjahres eintritt, die noch aushaftenden Raten dieses Jahres von der Versicherungssumme in Abzug gebracht werden.

---

*) Der Regiezuschlag bei den temporären Todesfallversicherungen wird deshalb besonders hoch bemessen, weil die Abschlußkosten in verhältnismäßig kurzer Zeit amortisiert sein müssen und der Gesundheitszustand der diese Verträge abschließenden Personen in der Regel zu besonderer Vorsicht mahnt.

§ 52.

Gemischte Versicherung.

Die derzeit beliebteste Versicherungskombination ist die *alternative Versicherung auf den Erlebens- und Ablebensfall* oder, wie sie zumeist genannt wird, die *gemischte Versicherung. Bei derselben wird das Kapital fällig, sobald der Versicherte ein im vorhinein bestimmtes Alter erreicht oder, wenn er früher stirbt, bei seinem Tode.*

Die gemischte Versicherung — $A_{x\overline{n|}}$ — *setzt sich aus einer Erlebens- und einer temporären Todesfallversicherung zusammen:*

$$A_{x\overline{n|}} = {}_nE_x + {}_{|n}A_x = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Da

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} = 1 - d \, a_x,$$

ist $M_x = D_x - d \, . \, a_x \, . \, D_x = D_x - d \, . \, N_x$ und

$$M_{x+n} = D_{x+n} - d \, . \, N_{x+n}.$$

Sohin ist

$$D_{x+n} + M_x - M_{x+n} = D_{x+n} + D_x - d \, . \, N_x - D_{x+n} + d \, . \, N_{x+n}$$
$$= D_x - d\,(N_x - N_{x+n}) \text{ und}$$

$$A_{x\overline{n|}} = \frac{D_x - d\,(N_x - N_{x+n})}{D_x} = 1 - d \, . \, _{|n}a_x.$$

Die während der ganzen Versicherungsdauer zu zahlende Jahres-Nettoprämie bestimmt sich aus der Gleichung

$$A_{x\overline{n|}} = P_x \, . \, _{|n}a_x,$$

die nur $m\,(< n)$-mal zu entrichtende Prämie aus

$$A_{x\overline{n|}} = P_x \, . \, _{|m}a_x.$$

Welche Jahresprämie hat ein 40-Jähriger für eine gemischte Versicherung auf das 60. Lebensjahr im Betrage von 10 000 K während der ganzen Versicherungsdauer zu entrichten, wenn 20% Zuschlag in Anrechnung gelangen?

Aus der Grundgleichung

$$A_{40\,\overline{20|}} = P_{40} \, . \, _{|20}a_{40}$$

kann, ebenso wie bei der Todesfallversicherung gegen lebenslängliche Prämienzahlung, die Nettoprämie auf zweifache Weise ermittelt werden. Bei Benützung des Wertes der Leibrente ist

$$1 - d \, . \, _{|20}a_{40} = P_{40} \, . \, _{|20}a_{40},$$

somit $P_{40} = \frac{1}{_{20}a_{40}} - d = \frac{D_{40}}{N_{40} - N_{60}} - 0\cdot03381643$

$= \frac{22\,593}{375\,143 - 78\,663} - 0\cdot03381643 = 0\cdot042386$

20% Zuschlag . . 0·008477

$x = 10\,000 \,.\, 0\cdot050863$

$= 508\cdot63\ K.$

Werden in die Grundgleichung beiderseits die diskontierten Zahlen eingesetzt, so erhält man

$$\frac{D_{60} + M_{40} - M_{60}}{D_{40}} = P_{40} \cdot \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}},\ \text{somit für}$$

$$P_{40} = \frac{D_{60} + M_{40} - M_{60}}{N_{40} - N_{60}} = \frac{7\,751\cdot4 + 9\,906\cdot82 - 5\,091\cdot55}{375\,143 - 78\,663} = 0\cdot042386.$$

Den Berechnungen der gemischten Versicherungen wurden bisher Todesfall- und keine Rentner-(Erlebens-)Tafeln zugrunde gelegt; die österreichisch-ungarischen Versicherungs-Gesellschaften haben jedoch, wie bereits S. 120 erwähnt, für gemischte Versicherungen eigene Absterbeordnungen konstruiert.

§ 53.

Versicherung à terme fixe.

Eine Versicherungskombination, welche sich weder als reine Todesfall- noch als gemischte Versicherung darstellt, aber mit beiden Kombinationen Ähnlichkeit besitzt, ist die *Versicherung à terme fixe* oder *Versicherung mit bestimmter Verfallzeit (mit bestimmtem Zahlungstermin). Bei derselben wird die Versicherungssumme in einem von vornherein bestimmten Zeitpunkt fällig, gleichgiltig, ob die versicherte Person dann noch lebt oder nicht.* Das Erlebensmoment kommt also nur bei den Einzahlungen des Versicherten in Betracht — dieser zahlt die Prämie nur so lange er lebt, äußersten Falles bis zum Fälligkeitstermine des Kapitales —; nicht aber bei der Bestimmung der Anstaltsleistung, denn hier handelt es sich um eine einfache Abzinsung.

Die jährliche Nettoprämie wird sich demnach, wenn 1 die versicherte Summe und n die Versicherungsdauer vorstellt, aus der Gleichung

$$\frac{1}{r^n} = P_x \cdot {}_{|n}a_x$$

bestimmen.

Ein 40jähriger Mann möchte seinem 2jährigen Töchterchen bei erreichtem 22. Lebensjahr ein Kapital von 6000 K sichern. Zu diesem Behufe schließt er eine *à terme fixe-Versicherung* mit 20jähriger Dauer ab und verpflichtet sich, so lange er lebt, längstens aber durch 20 Jahre eine gleich große Viertel-Jahresprämie zu entrichten. Wie groß ist dieselbe, wenn der jährlichen Bruttoprämie ein 15%iger Zuschlag zugrunde liegt und bei quartalweiser Zahlung noch 3% in Anrechnung kommen?

Das Alter des Kindes bleibt ganz außer Betracht, denn das Kapital wird nach 20 Jahren unbedingt, demnach auch dann fällig, wenn das Kind mittlerweile gestorben wäre.

Aus der Grundgleichung

$$\frac{1}{r^{20}} = P_{40} \cdot {}_{|20}a_{40}$$

folgt für

$$P_{40} = \frac{1}{1\cdot035^{20}} \cdot \frac{D_{40}}{N_{40} - N_{60}} = 0\cdot50256588 \cdot \frac{22\,593}{375\,143 - 78\,663}$$

$= 0\cdot0382965$

0·0057444 15% Zuschlag

$0\cdot0440409 \,.\, 6000 = 264\cdot25\ K$ (jährliche Bruttoprämie).

Die Viertel-Jahresprämie beträgt demnach

$$\frac{264\cdot25 + 2\cdot6425 \,.\, 3}{4} = 68\cdot05\ K.$$

Ein Vergleich zwischen dieser Nettoprämie und jener der gemischten Versicherung desselben Alters und der gleichen Laufzeit zeigt, daß die Prämie für die à terme fixe-Versicherung kleiner ist (pro 1000 38·30 gegen 42·39). Dieses Resultat ist darin begründet, daß das Kapital bei der gemischten Versicherung spätestens, bei der à terme fixe-Versicherung jedenfalls aber erst mit Ablauf der Versicherungsdauer zur Auszahlung kommt.

§ 54.

Versicherungen mit Prämienrückgewähr.

Bei der Erlebensversicherung sind die Prämien umsonst gezahlt, wenn der Versicherte das festgesetzte Alter nicht erreicht, desgleichen bei einer aufgeschobenen Renten- oder Ablebensversicherung, wenn der Tod vor Ablauf der Karenz eintritt. Es ist jedoch dem Versicherten die Möglichkeit geboten, sich das Recht auf die eingezahlten Prämien dadurch zu wahren, daß er die betreffende *Versicherung mit Rückgewähr der Prämien* abschließt.

Die Leistung der Anstalt besteht in diesem Falle, beispielsweise bei einer gegen *Einmalprämie* abgeschlossenen *Erlebensversicherung* in der gewöhnlichen Erlebensversicherung (wenn der Versicherte das festgesetzte Alter erlebt) und in der Rückerstattung der bei Vertragsabschluß entrichteten Einmalprämie, sofern der Versicherte innerhalb der Laufzeit (n Jahre) stirbt. Die Rückgewähr stellt dem-

nach eine auf die Dauer der Versicherung abgekürzte Todesfallversicherung im Betrage der geleisteten Bruttoprämie dar.

Nehmen wir an, der Regiezuschlag betrage α%, dann ist die Netto-Einmalprämie für die Erlebensversicherung mit Rückgewähr

$${}_n^rE_x = {}_nE_x + \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) {}_n^rE_x \cdot {}_{|n}A_x.$$

${}_n^rE_x$ ist die Nettoprämie der Versicherung mit Rückgewähr; der Versicherte bekommt aber die um α% vermehrte Nettoeinlage zurück, und darum ist im rechten Teil der Gleichung $\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) {}_n^rE_x \cdot {}_{|n}A_x$ zu setzen.

Aus der Gleichung ergibt sich

$${}_n^rE_x = \frac{{}_nE_x}{1 - \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \cdot {}_{|n}A_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x - \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)(M_x - M_{x+n})}.$$

In analoger Weise erhält man als Netto-Einmalprämie für die durch k Jahre *aufgeschobene Leibrente mit Rückgewähr*

$${}_{k|}^r a_x = \frac{{}_{k|}a_x}{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot {}_{|k}A_x} = \frac{N_{x+k}}{D_x - \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)(M_x - M_{x+k})}.$$

Ein 40jähriger Mann will eine nach 20 Jahren beginnende und dann lebenslänglich zahlbare Leibrente von jährlich 1500 K versichern, die geleistete Einlage aber, im Falle er vor Antritt der Rente (d. i. vor vollendetem 60. Lebensjahr) stirbt, rückerstattet erhalten. Wie groß ist die Einlage bei $7^1/_2$%igem Regiezuschlag?

Nachdem diese Aufgabe auf Grund der Rentner-Sterbetafel zu lösen ist, dieselbe aber keinerlei Werte von M_x enthält, müssen wir diese durch N_x ausdrücken.

Nach früheren Ausführungen (S. 143) ist

$$M_x = D_x - d \,.\, N_x \quad \text{und} \quad M_{x+k} = D_{x+k} - d \,.\, N_{x+k},$$

somit

$$M_x - M_{n+k} = D_x - D_{x+k} - d\,(N_x - N_{x+k})$$

und

$${}_{20}^{r}a_{40} = \frac{N_{60}}{D_{40} - 1{\cdot}075\,[D_{40} - D_{60} - 0{\cdot}0338164\,(N_{40} - N_{60})]} = 5{\cdot}5468.$$

Die Netto-Einlage für die mit Rückgewähr der Prämie abgeschlossene Rentenversicherung im Betrage 1 beläuft sich demnach auf 5·5468; wird der Zuschlag von $7^1/_2$%*) per 0·4160 hinzugegeben, so folgt

als Bruttoprämie für 1 K Rente . . . 5·9628 K
und „ „ „ 1500 „ „ . . . 8944·20 „ .

*) Dieser Zuschlag bezieht sich sowohl auf die reine Leibrenten- als auch auf die Gesamtversicherung.

Der 40-Jährige erwirbt also gegen Erlag von 8944·20 K eine mit dem 60. Lebensjahr beginnende lebenslängliche Rente von jährlich 1500 K und seine Angehörigen erhalten, wenn er vor Antritt des Rentenbezuges stirbt, den Betrag von 8944·20 K rückvergütet.

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem auf S. 128 erhaltenen, so sehen wir, daß die Versicherung der Rückgewähr allein (ohne Hauptversicherung) 8944·2 — 7607·6 = 1336·6 K kostet und dies ist nichts anderes als die einmalige Bruttoprämie (bei $7^1/_2$% Zuschlag) für eine auf 20 Jahre abgekürzte Todesfallversicherung des 40-Jährigen im Betrage von 8944·2 K (berechnet nach der Rentner-Sterbetafel).

Eine Versicherungsgesellschaft begehrt für eine Erlebensversicherung eines 33-Jährigen auf das 55. Lebensjahr im Betrage von 1000 K mit Rückgewähr der Prämien im Falle des früheren Todes eine Jahresprämie von 34·22 K. Ist es vom ökonomischen Standpunkte aus empfehlenswert, eine solche Versicherung abzuschließen?

Um diese Frage beantworten zu können, braucht man nur untersuchen, ob in der Sparkasse die bis zum 55. Lebensjahre gezahlten Prämien einen größeren Endwert als 1000 K repräsentieren; stirbt der Versicherte früher, dann erleidet er jedenfalls einen Verlust, weil die Zinsen der gezahlten Prämien verloren gehen.

Nehmen wir an, die Sparkasse verzinse die Einlagen zu $3^1/_2$%, dann ist

$$34{\cdot}22 \,.\, \mathrm{T\,III}^{(22}_{3^1/_2} = 1145{\cdot}02;$$

ja selbst bei einer 3%igen Verzinsung ergibt sich ein Sparkasseguthaben von

$$34{\cdot}22 \,.\, 31{\cdot}45288 = 1076{\cdot}32\ K,$$

so daß im vorliegenden Falle die Sparkasse der Versicherung vorzuziehen ist.

c) Versicherung verbundener Leben.

§ 55.

Verbindungsrenten.

Die sämtlichen bisher besprochenen Versicherungskombinationen waren vom Leben oder Sterben einer Person abhängig; im folgenden sollen einige Kombinationen behandelt werden, bei welchen *zwei Leben* in Rechnung zu ziehen sind.

Zwei Personen (Ehepaar, Geschwister) im Alter von x und y Jahren wollen beispielsweise, solange beide am Leben sind, eine postnumerando zahlbare Rente von jährlich „1" beziehen; welche Einmalprämie ist für diese *Verbindungsrente* zu entrichten?

Die erste Rentenzahlung wird am Schlusse des 1. Versicherungsjahres geleistet, wenn beide Personen am Leben sind; die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $\frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite Rate fällig wird, ist $\frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_y}$ usf., so daß sich als Wert der Verbindungsrente ergibt

$$a_{xy} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y} \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_y} \cdot v^2 + \frac{l_{x+3}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+3}}{l_y} v^3 + \cdots\cdots$$
$$= \frac{v^{x+1} \cdot l_{x+1}}{v^x \cdot l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y} + \frac{v^{x+2} \cdot l_{x+2}}{v^x \cdot l_x} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_y} + \frac{v^{x+3} \cdot l_{x+3}}{v^x \cdot l_x} \cdot \frac{l_{y+3}}{l_y} + \cdots$$
$$= \frac{D_{x+1} \cdot l_{y+1} + D_{x+2} \cdot l_{y+2} + D_{x+3} \cdot l_{y+3} + \cdots\cdots}{D_x \cdot l_y}.$$

Man kann den Wert der Verbindungsrente aber auch darstellen als

$$a_{xy} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{v^{y+1} \cdot l_{y+1}}{v^y \cdot l_y} + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{v^{y+2} \cdot l_{y+2}}{v^y \cdot l_y} + \frac{l_{x+3}}{l_x} \cdot \frac{v^{y+3} \cdot l_{y+3}}{v^y \cdot l_y} +$$
$$= \frac{l_{x+1} \cdot D_{y+1} + l_{x+2} \cdot D_{y+2} + l_{x+3} \cdot D_{y+3} + \cdots}{l_x \cdot D_y}.$$

Will man nun nach einer dieser beiden Formeln den Wert der Verbindungsrente beispielsweise für zwei Personen vom Alter 45 und 38 berechnen, so hat man zu bilden

$$a_{45:38} = (D_{46} \cdot l_{39} + D_{47} \cdot l_{40} + \cdots + D_{98} \cdot l_{91} + D_{99} \cdot l_{92}) : D_{45} \cdot l_{38}$$

und aus der *Rentner-Sterbetafel* die bezüglichen Werte eingesetzt,

$$a_{45:38} = \frac{18\,514 \,.\, 94\,321 + 17\,738 \,.\, 93\,811 + \cdots + 1{\cdot}1 \,.\, 2237 + 0{\cdot}2 \,.\, 1521}{19\,314 \,.\, 94\,810}$$

Wären die Alter der beiden Personen 50 und 43 — die Altersdifferenz also wieder 7 Jahre — so könnte vom 6. Summanden an der vorstehende Zähler verwendet werden, nicht aber, wenn etwa die Alter 50 und 42 in Frage kämen. Es zeigt sich also, daß für jede Altersdifferenz die Bildung spezieller Produkte erforderlich ist.

Als Wert der vorschüssig zahlbaren Verbindungsrente im Betrage 1 ergibt sich

$$\text{a}_{xy} = 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y} \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_y} \cdot v^2 + \cdots = 1 + a_{xy}.$$

§ 56.

Überlebensrenten.

Ein x-jähriger Mann versichert seine y-jährige Frau derart, daß sie nach seinem Tode eine jährlich pränumerando zahlbare lebenslängliche Rente im Betrage 1 erhält; welche einmalige Einlage ist für diese *Anwartschaft auf Witwenpension* zu entrichten?

Die Antwort ergibt sich durch folgende Überlegung: Würde der Frau gleich vom Vertragsabschluß an die Rente gewährt, so erhielte sie offenbar um so viele Raten zu viel, als beide Personen noch Jahre gemeinsam leben. Es ist also von der gewöhnlichen, sofort beginnenden Pränumerando-Leibrente der Frau noch der Wert der vorschüssigen Verbindungsrente in Abzug zu bringen, so daß

$$\text{a}_{x|y} = \text{a}_y - \text{a}_{xy}.$$

Wird die Witwenpension gegen Jahresprämien versichert (dieselben werden höchstens so lange gezahlt, als beide Personen am Leben sind), dann besteht die Gleichung

$$\text{a}_y - \text{a}_{xy} = \text{a}_{xy} \,.\, P_{x|y}.$$

Sobald man an die ziffermäßige Ausrechnung konkreter Aufgaben betreffend die Versicherung verbundener Leben herantritt, entsteht zunächst die Frage, aus welcher Absterbeordnung die Werte der Verbindungsrenten abzuleiten sind. Bei Versicherung der letzteren müssen zweifellos sowohl die D_x (beziehungsweise l_x) als auch die l_y (beziehungsweise D_y) einer Rentner-Sterbetafel entnommen werden; handelt es sich jedoch um die Versicherung einer Witwenpension, dann ist zu erwägen, daß das Risiko der Versicherungsgesellschaft in dem frühzeitigen Sterben des Mannes und der Langlebigkeit der Frau besteht. Demnach sollten die D_x (beziehungsweise l_x) einer Todesfalltafel und die l_y (beziehungsweise D_y) einer Rentnertafel entnommen werden. Kommen trotzdem — wie dies in der Regel geschieht — Verbindungsrenten in Anwendung, welche nur aus einer, und zwar einer Todesfalltafel berechnet sind, also z. B. aus der Tafel der 17 englischen Gesellschaften, dann werden diese Verbindungsrenten durchwegs etwas kleinere Werte aufweisen als die aus einer kombinierten Tafel abgeleiteten. Die Folge davon wird sein, daß bei der Einmalprämie (der Witwenpension) der Subtrahend und bei der Jahresprämie der Nenner der Minuends etwas kleiner ist, daher die Prämien selbst um ein Unbedeutendes größer ausfallen.

Der Wert für a_y ist, ebenso wie bei der gewöhnlichen Leibrentenversicherung, der Rentnertafel zu entnehmen.

Auf S. 22 und 23 der Hilfs-Tabellen sind die Barwerte der vorschüssigen Verbindungsrenten „1", berechnet nach der Tafel der 17 englischen Gesellschaften und einem Zinsfuße von $3^1/_2$%, für die Altersdifferenzen von 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 und 15 Jahren angegeben. So ist z. B. der Wert der Verbindungsrente für einen

40jährigen Mann und eine 36jährige Frau . . . . . 14·403
37 „ „ „ „ 39 „ „ . . . . . 14·439.

Welche jährliche Prämie hat ein 38jähriger Mann für eine Witwenpension von jährlich 1200 K zugunsten seiner um 3 Jahre jüngeren Frau zu bezahlen, wenn 12% Regiezuschlag in Anrechnung gelangen?

Aus der Grundgleichung

$$\mathrm{a}_{35} - \mathrm{a}_{38:35} = P_{38:35} \cdot \mathrm{a}_{38:35}$$

folgt für

$$P_{38:35} = \frac{\mathrm{a}_{35}}{\mathrm{a}_{38:35}} - 1 = \frac{19\cdot759}{14\cdot786} - 1 = 0\cdot3363$$

$$\underline{0\cdot0404} \quad 12\% \text{ Zuschlag}$$

$$x = 1200 \cdot 0\cdot3767 = 452\cdot04\ K.$$

Zwei Geschwister im Alter von 30 und 34 Jahren versichern sich derart, daß, solange beide leben, ihnen eine jährliche nachschüssig zahlbare Rente von 2000 K ausbezahlt werde, nach dem Tode der zuerst sterbenden Person aber an die überlebende in Hinkunft nur jährlich 1000 K auszufolgen sind. Wie groß ist die Netto-Einmalprämie?

Solange beide Personen leben, erhalten sie eine jährliche Rente von 2000 K, deren Netto-Barwert $2000 \cdot a_{34:30}$ ist; hiezu kommt noch der Wert der an die überlebende Person zu zahlenden Rente. Hier sind nun zwei Möglichkeiten denkbar: entweder stirbt die ältere Person zuerst, dann ist der Wert der an die jüngere Person zu zahlenden *Überlebensrente* $1000\,a_{30} - 1000\,a_{34:30}$, oder es stirbt die jüngere Person zuerst, dann ist $1000\,a_{34} - 1000\,a_{34:30}$ als Rentenwert einzustellen. Es ergibt sich demnach als schließliche Nettoeinlage

$$2000\,a_{34:30} + 1000\,a_{30} - 1000\,a_{34:30} + 1000\,a_{34} - 1000\,a_{34:30}$$
$$= 1000\,a_{30} + 1000\,a_{34} = 38\,939\ K,$$

ein Resultat, welches übrigens unmittelbar einzusehen ist.

Ist bedungen, daß die Rente im Betrage von 1000 K unverändert bis zum Tode der zuletzt sterbenden Person gezahlt werde, dann hat man die folgende Überlegung zu machen: Bekäme jede der beiden Personen bis zu ihrem Tode eine Rente von 1000 K, dann erhielten sie für die Zeit ihres Zusammenlebens jährlich 2000 K, also um 1000 K zu viel; darum ist die Nettoeinlage für die fragliche Rente

$$1000\,a_{30} + 1000\,a_{34} - 1000\,a_{34:30} = 1000\,(a_{30} + a_{34} - a_{34:30})$$
$$= 1000\,(19\cdot932 + 19\cdot007 - 14\cdot767) = 24\,172\ K.$$

Der Vertrag laute dahin, daß die Rente von 1000 K vom Tode der zuerst sterbenden bis zum Tode der überlebenden Person jährlich im vorhinein zu zahlen sei. — Bei dieser *gegenseitigen Überlebensrente* ist zu erwägen, daß entweder die ältere oder die jüngere Person zuerst sterben kann und daher zwei einseitige Überlebensrenten in Anrechnung zu bringen sind, so daß

$$x = (1000\,\mathrm{a}_{30} - 1000\,\mathrm{a}_{34:30}) + (1000\,\mathrm{a}_{34} - 1000\,\mathrm{a}_{34:30})$$
$$= 1000\,(\mathrm{a}_{30} + \mathrm{a}_{34} - 2\,\mathrm{a}_{34:30}) = 9405\ K.$$

Wie groß ist die jährliche Bruttoprämie für eine gegenseitige Überlebensrente von 1500 K zweier Geschwister im Alter von 55 und 50 Jahren bei 19%igem Regiezuschlag?

Die Grundgleichung lautet für diesen Fall

$$\mathrm{a}_{55} - \mathrm{a}_{55:50} + \mathrm{a}_{50} - \mathrm{a}_{55:50} = P_{55:50} \cdot \mathrm{a}_{55:50};$$

demnach ist

$$P_{55:50} = \frac{\mathrm{a}_{55} + \mathrm{a}_{50} - 2\,\mathrm{a}_{55:50}}{\mathrm{a}_{55:50}} = \frac{\mathrm{a}_{55} + \mathrm{a}_{50}}{\mathrm{a}_{55:50}} - 2 = 0\cdot8515$$

$$\underline{0\cdot0852} \quad 10\% \text{ Zuschlag}$$

$$x = 1500 \cdot 0\cdot9367 = 1405\ K.$$

§ 57.

Erlebensversicherung verbundener Leben.

Das versicherte Kapital 1 wird fällig, wenn zwei Personen vom Alter x und y nach n Jahren noch am Leben sind.

Die für diese Versicherung zu zahlende Einmalprämie ist

$$_nE_{xy} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot v^n = \frac{D_{x+n} \cdot l_{y+n}}{D_x \cdot l_y} = \frac{l_{x+n} \cdot D_{y+n}}{l_n \cdot D_y}$$

z. B. für $x = 37$, $y = 34$, $n = 18$ ist

$$_{18}E_{37:34} = \frac{D_{55} \cdot l_{52}}{D_{37} \cdot l_{34}} = \frac{{}^{*)}\ 12\,265 \cdot 84\,775}{26\,681 \cdot 96\,596} = 0\ 40344.$$

Ist bedungen, daß das Kapital fällig wird, wenn nach n Jahren eine Person am Leben und die andere gestorben ist, dann resultiert als Einmalprämie

$$\left[\frac{l_{x+n}}{l_x}\left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right) + \frac{l_{y+n}}{l_y}\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\right] \cdot v^n$$
$$= \left(\frac{l_{x+n}}{l_x} + \frac{l_{y+n}}{l_y} - 2\,\frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}\right) \cdot v^n = {}_nE_x + {}_nE_y - 2\,{}_nE_{xy}.$$

Wird schließlich das Kapital 1 fällig, wenn von x und y nach n Jahren noch **mindestens** eine Person lebt, so ergibt sich als Einmalprämie

$$\left[\frac{l_{x+n}}{l_x}\left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right) + \frac{l_{y+n}}{l_y}\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right) + \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}\right] \cdot v^n$$
$$= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n + \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot v^n - \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x\ l_y}\ v^n = {}_nE_x + {}_nE_y - {}_nE_{xy}.$$

*) Rentner-Sterbetafel.

§ 58.

Todesfallversicherung verbundener Leben.

Das Kapital 1 wird ausbezahlt, sobald von zwei Personen des Alters x und y eine Person stirbt.

Bei der Ermittlung der Einmalprämie für diese *gegenseitige Überlebensversicherung* wollen wir ebenso wie bei der Todesfallversicherung auf ein Leben annehmen, daß das versicherte Kapital am Ende jenes Jahres fällig wird, in welchem das Personenpaar aufgelöst wurde. Demnach erhält man

$$A_{xy} = \frac{l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}}{l_x l_y} \cdot v + \frac{l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2}}{l_x \cdot l_y} \cdot v^2 + $$

$$+ \frac{l_{x+2} l_{y+2} - l_{x+3} l_{y+3}}{l_x \cdot l_y} \cdot v^3 + \cdots$$

$$= v \cdot \left(\frac{l_x l_y}{l_x l_y} + \frac{l_{x+1} l_{y+1}}{l_x l_y} \cdot v^2 + \frac{l_{x+2} l_{y+2}}{l_x l_y} \cdot v^3 + \cdots\cdots \right) -$$

$$- \left(\frac{l_{x+1} l_{y+1}}{l_x l_y} \cdot v + \frac{l_{x+2} l_{y+2}}{l_x l_y} \cdot v^2 + \frac{l_{x+3} l_{y+3}}{l_x l_y} \cdot v^3 + \cdots\cdots \right)$$

$$= \frac{1}{r} \mathrm{a}_{xy} - (\mathrm{a}_{xy} - 1) = 1 - \frac{r-1}{r} \mathrm{a}_{xy} = 1 - d\, \mathrm{a}_{xy}.$$

Zwei Personen im Alter von 50 und 40 Jahren wollen eine gegenseitige Überlebensversicherung von 14 000 K abschließen. Welche Jahresprämie ist hiefür zu entrichten, wenn 15% Zuschlag berechnet werden?

Da für diese Aufgabe

$$1 - d \,.\, \mathrm{a}_{50:40} = P_{50:40} \,.\, \mathrm{a}_{50:40},$$

folgt für

$$P_{50:40} = \frac{1}{\mathrm{a}_{50:40}} - d$$

$$= \frac{1}{12 \cdot 212} - 0 \cdot 0338164 = 0 \cdot 048071$$

$$\underline{0 \cdot 007211} \quad 15\% \text{ Zuschlag}$$

$$x = 14\,000 \,.\, 0 \cdot 055282 = 773 \cdot 95 \; K.$$

Wird das versicherte Kapital beim Tode einer bestimmten Person (z. B. x) *gezahlt, wenn die andere* — begünstigte — *Person* (y) *noch lebt, so handelt es sich um eine einseitige Überlebensversicherung.*

Versichert beispielsweise ein x-jähriger Mann seine y-jährige Frau derart, daß sie bei seinem Tode den Betrag 1 erhält, wenn sie dann noch lebt, so ist zu erwägen, daß der Mann im 1., im 2. oder in irgend einem der folgenden Versicherungsjahre sterben kann, der Betrag 1 aber (am Schlusse des Sterbejahres) nur dann gezahlt wird, wenn die Frau in diesem Zeitpunkte noch am Leben ist. Es ergibt sich demnach als Einmalprämie folgender Ausdruck:

$$A_{x|y} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y} \cdot v + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_y} \cdot v^2 + \cdots$$

$$= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{D_{y+1}}{D_y} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{D_{y+2}}{D_y} + \cdots$$

$$= \frac{l_x \,.\, D_{y+1} + l_{x+1} \,.\, D_{y+2} + l_{x+2} \,.\, D_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x \,.\, D_y} -$$

$$- \frac{l_{x+1} D_{y+1} + l_{x+2} D_{y+2} + l_{x+3} D_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x \,.\, D_y}$$

$$= \frac{D_{y+1}}{D_y} \cdot \frac{l_x \,.\, D_{y+1} + l_{x+1} \,.\, D_{y+2} + l_{x+2} \,.\, D_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x \,.\, D_{y+1}} -$$

$$- \frac{l_x \,.\, D_y + l_{x+1} \,.\, D_{y+1} + l_{x+2} \,.\, D_{y+2} + \cdots\cdots - l_x \,.\, D_y}{l_x \,.\, D_y}$$

$$= \frac{D_{y+1}}{D_y} \cdot \mathrm{a}_{x:y+1} - \mathrm{a}_{xy} + 1.$$

Ein 40jähriger Mann will, solange er und seine um 4 Jahre ältere Frau leben, eine jährliche Prämie von 200 K zahlen, um seiner Frau für den Fall seines Todes ein bestimmtes Kapital zu sichern. Wie groß ist dasselbe, wenn 12% Zuschlag in Anrechnung kommen?

Aus der Grundgleichung

$$\frac{D_{45}}{D_{44}} \cdot \mathrm{a}_{40:45} - \mathrm{a}_{40:44} + 1 = P_{40|44} \,.\, \mathrm{a}_{40:44}$$

ergibt sich für

$$P_{40|44} = \frac{1 + \frac{D_{45}}{D_{44}} \cdot \mathrm{a}_{40:45}}{\mathrm{a}_{40:44}} - 1 = \frac{1 + \frac{{}^{*)}\, 15\,829 \cdot 29}{16\,577 \cdot 23} \cdot 13 \cdot 180}{13 \cdot 351} - 1$$

$$= 0 \cdot 017551$$

$$\underline{0 \cdot 002106} \quad 12\%$$

$$x = 200 : 0 \cdot 019657 = 10\,175 \; K.$$

---

*) 17 engl. 3½%.

Zweiter Abschnitt.

Prämienreserve-Berechnung.

§ 59.

Begriff und Berechnungsmethoden der Prämienreserve.

Bisher wurde ausschließlich von der Art der Prämienermittlung gesprochen, nicht aber von den Vorsorgen, welche die Versicherungs-Gesellschaft treffen muß, um im Zeitpunkte des Eintrittes der versicherten Ereignisse die dann fälligen Summen auszahlen zu können.

Nachdem die *Nettoprämien* jenes Entgelt darstellen, welches der Versicherte der Anstalt für deren seinerzeitige Leistung zu entrichten hat, ist die Gesellschaft in den Stand gesetzt, auf Grund der vereinnahmten Nettoprämien und Zinsen den Vertragsverbindlichkeiten zu entsprechen, vorausgesetzt, daß ihre Versicherten im Durchschnitte nach der der Prämienberechnung zugrunde gelegten Mortalitätstafel absterben und die Anstalt aus der Fruktifizierung der Prämien jene Verzinsung erzielt, auf Grund deren die *Tarife* (das sind nach den verschiedenen Altern abgestufte tabellarische Zusammenstellungen der Prämien) berechnet wurden.

Dieses aus den Nettoprämien und den aufgelaufenen Zinsen gebildete und zur Erfüllung der künftigen Verpflichtungen zu reservierende Deckungskapital nennt man allgemein Prämienreserve.

Die Ministerialverordnung vom 5. März 1896 (sogenanntes *Assekuranz-Regulativ*) schreibt im § 28 vor, daß „die Prämienreserven der Lebensversicherungen für die in Kraft stehenden Versicherungsverträge nach mathematischen Grundsätzen durch einen Sachverständigen jedes Jahr zu berechnen sind und die Berechnung mit Zugrundelegung von Nettoprämien und mit Anwendung jener Mortalitätstafeln und jenes Zinsfußes zu erfolgen hat, welche der*) genehmigten Tarifberechnung zugrunde gelegt worden sind".

---

*) Vom Staatsamt für Inneres und Unterricht.

Diese für die Berechnung der Prämienreserve in Frage kommenden mathematischen Grundsätze wollen wir nun näher kennen lernen.

Zu diesem Behufe nehmen wir an, daß alle in der Absterbeordnung beim Alter x verzeichneten Personen l_x eine Todesfallversicherung gegen lebenslängliche Prämienzahlung abschließen; dann erhält die Anstalt zu Beginn des 1. Versicherungsjahres an Nettoprämien den Betrag $l_x . P_x$, welcher bis zum Schluß des Jahres auf $l_x . P_x . r$ anwächst. Für jede von den während des Jahres gestorbenen d_x Personen wird am Schlusse des Jahres 1 K fällig, so daß am Schlusse des 1. Jahres ein Betrag von $l_x P_x r - d_x$ vorhanden ist. Im 2. Jahre entrichten l_{x+1} Personen dieselbe Prämie P_x und sterben d_{x+1} Personen, so daß am Ende des 2. Jahres vorrätig ist

$$(l_x P_x r - d_x + l_{x+1} . P_x) r - d_{x+1}.$$

In der gleichen Weise erhält man für den Schluß des 3. Jahres

$$\begin{aligned}&(l_x P_x r^2 - d_x r + l_{x+1} . P_x r - d_{x+1} + l_{x+2} . P_x) r - d_{x+2}\\ &= l_x P_x r^3 - d_x r^2 + l_{x+1} . P_x r^2 - d_{x+1} r + l_{x+2} . P_x r - d_{x+2}\\ &= P_x (l_x r^3 + l_{x+1} . r^2 + l_{x+2} . r) - (d_x r^2 + d_{x+1} . r + d_{x+2})\end{aligned}$$

oder allgemein für das Ende des t^{ten} Jahres

$$\begin{aligned}&P_x (l_x r^t + l_{x+1} . r^{t-1} + l_{x+2} . r^{t-2} + \ldots\ldots + l_{x+t-2} . r^2 + l_{x+t-1} . r) -\\ &- (d_x r^{t-1} + d_{x+1} . r^{t-2} + \ldots + d_{x+t-2} . r + d_{x+t-1}).\end{aligned}$$

Will man nun von diesem Gesamtbetrag den auf eine Person entfallenden Anteil bestimmen, so hat man nur diesen Ausdruck durch die Anzahl der im Zeitpunkte der Berechnung noch vorhandenen Lebenden (l_{x+t}) zu dividieren und erhält somit als *Wert der Prämienreserve nach t Jahren für den beim Vertragsabschluß x-Jährigen*

$$\begin{aligned}V_t = P_x &\frac{l_x r^t + l_{x+1} . r^{t-1} + l_{x+2} . r^{t-2} + \ldots\ldots + l_{x+t-1} . r}{l_{x+t}} -\\ &- \frac{d_x r^{t-1} + d_{x+1} . r^{t-2} + \ldots\ldots + d_{x+t-2} . r + d_{x+t-1}}{l_{x+t}}.\end{aligned}$$

Der Minuend bedeutet nichts anderes als den auf den Schluß des t^{ten} Jahres (also den Zeitpunkt der Berechnung) eskomptierten Wert der bisherigen Einzahlungen des Versicherten und der Subtrahend den Wert der auf denselben Zeitpunkt diskontierten, seit Vertragsabschluß gezahlten Leistungen der Anstalt. Demnach erhalten wir die folgende Definition:

Die Prämienreserve ist die Differenz aus dem auf den Zeitpunkt der Prämienreserve-Berechnung diskontierten Wert der bisherigen Netto-Einzahlungen des Versicherten und der bisherigen Leistungen der Anstalt.

Diese Art der Berechnung nennt man die *retrospektive Methode.* Ersetzt man r durch $\frac{1}{v}$ und multipliziert Zähler und Nenner beider Summanden mit v^{x+t}, dann ergibt sich für

$$ {}_tV_x = P_x \frac{v^x . l_x + v^{x+1} . l_{x+1} + \cdots + v^{x+t-1} . l_{x+t-1}}{v^{x+t} . l_{x+t}} - \frac{v^{x+1} . d_x + v^{x+2} . d_{x+1} + \cdots + v^{x+t} . d_{x+t-1}}{v^{x+t} . l_{x+t}} $$

$$ = P_x \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}. $$ (Vgl. S. 129 und 141.)

Denkt man sich im allgemeinen die Prämienzahlungen des Versicherten in solche vor und nach dem Zeitpunkte der Prämienreserve-Berechnung zerlegt und mit P_b, beziehungsweise P_k bezeichnet und auch die Leistungen der Anstalt in bisherige L_b und künftige L_k unterschieden, dann wird, da Leistung und Gegenleistung einander gleich sein müssen,

$$ P_b + P_k = L_b + L_k, \text{ beziehungsweise } P_b - L_b = L_k - P_k. $$

Da wir den linken Teil dieser Gleichung als den Begriff der Prämienreserve definiert haben, so muß natürlich auch der rechte Teil als solcher gelten und wir erhalten als 2. Definition:

Die Prämienreserve ist die Differenz zwischen dem Jetztwert der künftigen Leistungen der Anstalt und der künftigen Netto-Einzahlungen des Versicherten.

Bei dieser Berechnungsart — der *prospektiven Methode* — werden also die noch ausstehenden Zahlungen der Anstalt und des Versicherten auf den Zeitpunkt der Prämienreserve-Berechnung eskomptiert und voneinander subtrahiert.

Es ist ohne weiteres klar, *daß sich die prospektive Methode insbesondere bei Versicherungen gegen Einmalprämie, die retrospektive Methode hingegen bei Erlebensversicherungen und dann empfehlen wird, wenn es sich bei einer aufgeschobenen Versicherung um die Ermittlung der Prämienreserve innerhalb der Karenz handelt*; es fallen dann die Abzugsglieder weg, da bei der *prospektiven Methode* keine Einzahlungen des Versicherten mehr, bei der *retrospektiven Methode* aber noch keine Leistungen der Anstalt in Betracht zu ziehen sind.

Selbstverständlich muß der Wert der Prämienreserve nach beiden Berechnungsmethoden identisch sein, beziehungsweise sich die Formel nach der einen in jene nach der anderen Methode überführen lassen. So kann z. B. die obige *retrospektive* Formel für die Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung auch geschrieben werden:

$$ {}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} - \left(\frac{M_x}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_x}{D_{x+t}}\right). $$

Nun ist

$$ P_x = \frac{M_x}{N_x}, $$

sohin

$$ {}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} - \left(\frac{M_x}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x}{D_{x+t}}\right), $$

beziehungsweise

$$ {}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = A_{x+t} - P_x . a_{x+t}. $$

Die Prämienreserve erscheint also dargestellt als Wert einer Todesfallversicherung für einen $x+t$-Jährigen, vermindert um den Wert der von diesem voraussichtlich noch zu entrichtenden Prämien und d. i. die Prämienreserve, berechnet nach der *prospektiven Methode.*

In der Folge soll die Prämienreserve im allgemeinen nur nach einer, und zwar der im gegebenen Falle empfehlenswerteren Methode ermittelt werden; ist nichts Besonderes vermerkt, so wurde die *prospektive* Methode verwendet.

§ 60.

Leibrenten-Versicherungen.

Sofort beginnende, lebenslängliche nachschüssige Leibrente.

$$ {}_tV^*(a_x) = \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \cdot v + \frac{l_{x+t+2}}{l_{x+t}} \cdot v^2 + \cdots = a_{x+t}, $$

d. i. der Wert einer lebenslänglichen nachschüssigen Leibrente für den $x+t$-Jährigen.

Es ist die Prämienreserve der ersten 3 Jahre für eine nachschüssig zahlbare Leibrente von 100 K für einen 60-Jährigen zu bestimmen.

$$ {}_1V_{60} = a_{61} = 10\cdot504 \text{ und für } 100\ K \text{ Rente } 1050\cdot40\ K $$
$$ {}_2V_{60} = a_{62} = 10\cdot141 \quad „ \quad „ \ 100 \ „ \quad „ \quad 1014\cdot10 \ „ $$
$$ {}_3V_{60} = a_{63} = 9\cdot778 \quad „ \quad „ \ 100 \ „ \quad „ \quad 977\cdot80 \ „ $$

Zu denselben Resultaten gelangt man auf die folgende Weise: Die von dem 60-Jährigen zu leistende Nettoeinlage beträgt

$$ 100 . a_{60} = 100 . 10\cdot866 = 1086\cdot60\ K; $$

nehmen wir an, daß alle l_{60} Personen die Versicherung abschließen, dann erhält die Anstalt an Nettoeinlagen

*) Bei der Bezeichnung der Prämienreserve pflegt man die Versicherungskombination, um welche es sich handelt, gewöhnlich beizufügen.

74 220 . 1086·6 = 80 647 452
hiezu $3^1/_2$% Zinsen 2 822 661
83 470 113
hievon ab die am Schlusse des 1. Jahres
fälligen Rentenzahlungen $l_{61} . 100 =$ 7 255 500
76 214 613
: 72 555 ($= l_{61}$)
$= 1050·40\ K = {}_1V$

$3^1/_2$% Zinsen 2 667 511
78 882 124
hievon ab die Rentenzahlungen des
2. Jahres . . . . $l_{62} . 100$ 7 079 800
71 802 324
: 70 798 ($= l_{62}$)
$= 1014·19\ K = {}_2V$.

Aufgeschobene Leibrente.

a) *Gegen Einmalprämie.*

α) $t < k$.

Nach der *retrospektiven* Methode:

$${}_tV({}_k\mathrm{a}_x) = {}_{k|}\mathrm{a}_x \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} = \frac{\mathrm{N}_{x+k}}{D_{x+t}}.$$

Zum besseren Verständnis des vorstehenden Resultates sei folgendes bemerkt:

${}_k\mathrm{a}_x$ stellt die einmalige Nettoprämie für die durch k Jahre aufgeschobene Leibrente „1" dar und nach der *retrospektiven* Methode ist der Wert dieser Einlage für den Schluß des t^{ten} Jahres zu bestimmen. Hiezu genügt natürlich nicht die bloße Aufzinsung, sondern es ist dabei auch das Erlebensmoment in Rücksicht zu ziehen. Da $\frac{D_{x+t}}{D_x}$ jene Nettoeinlage ist, die von einem x-Jährigen geleistet werden muß, wenn er nach t Jahren den Betrag 1 ausbezahlt erhalten will, kann man auch sagen, daß, vorausgesetzt, er lebt nach t Jahren noch, die seinerzeitige Einlage $\frac{D_{x+t}}{D_x}$ auf 1 angewachsen ist oder den Wert 1 repräsentiert. Der Wert für ${}_k\mathrm{a}_x$ bestimmt sich somit aus der Proportion

$${}_k\mathrm{a}_x : {}_tV = \frac{D_{x+t}}{D_x} : 1$$

$$\text{mit } {}_tV = \frac{{}_{k|}\mathrm{a}_x \,.\, D_x}{D_{x+t}}.$$

$\frac{\mathrm{N}_{x+k}}{D_{x+t}}$ stellt aber nicht nur die Prämienreserve nach der *retrospektiven*, sondern auch nach der *prospektiven* Methode dar, denn

$$\frac{\mathrm{N}_{x+k}}{D_{x+t}} = {}_{k-t|}\mathrm{a}_{x+t}$$

d. i. der Wert einer Leibrente für einen $x + t$-Jährigen, die im Alter $x + k$ beginnt oder noch $k - t$ Jahre aufgeschoben ist. Man hat also bei der *prospektiven* Methode einfach *die ursprüngliche Versicherung gemäß der bis zur Prämienreserve-Berechnung aufgelaufenen Zeit zu modifizieren* (das Alter x in $x + t$ und die Aufschubzeit k in $k - t$).

β) $t > k$.

$${}_tV({}_k\mathrm{a}_x) = \mathrm{a}_{x+t}$$

b) *Gegen k Jahresprämien.*

α) $t < k$.

Nach der *retrospektiven* Methode:

Die bisherigen Einzahlungen des Versicherten sind eine auf t Jahre abgekürzte Leibrente im Betrage P_x des x-Jährigen, bezogen auf den Zeitpunkt t; Leistungen sind der Anstalt bisher nicht erwachsen, demnach ist

$${}_tV({}_k\mathrm{a}_x) = P_x \cdot {}_{|t}\mathrm{a}_x \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} - 0$$

$$= \frac{\mathrm{N}_{x+k}}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+k}} \cdot \frac{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+t}}{D_x} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} = \frac{\mathrm{N}_{x+k}}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+k}} \cdot \frac{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+t}}{D_{x+t}}.$$

Nach der *prospektiven* Methode:

Die künftigen Leistungen der Anstalt sind dieselben wie bei der Versicherung gegen Einmalprämie und die künftigen Einzahlungen des Versicherten eine noch durch $k - t$ Jahre zahlbare Leibrente des $x + t$-Jährigen im Betrage der Jahresprämie P_x, somit

$${}_tV({}_{k|}\mathrm{a}_x) = {}_{k-t|}\mathrm{a}_{k+t} - P_x \cdot {}_{|k-t}\mathrm{a}_{x+t}.$$

β) $t > k$.

$${}_tV({}_k\mathrm{a}_x) = \mathrm{a}_{x+t}.$$

Ein 42-Jähriger versichert eine mit dem vollendeten 65. Lebensjahre beginnende lebenslängliche Leibrente von jährlich 1000 K gegen Prämienzahlung während der ganzen Aufschubszeit. Es ist die Prämienreserve nach 10, 15, 22, 23, 24 und 33 Jahren zu ermitteln*). (Hiebei ist natürlich vorausgesetzt, daß der Versicherte in diesen Zeitpunkten noch lebt, denn sobald er stirbt, ist die Anstalt jeder Verpflichtung ledig und hat auch nichts mehr für ihn zu reservieren.)

---

*) Vgl. Aufgabe S. 129; wegen des besseren Vergleiches wurde als Rentenbetrag 1000 angenommen.

Für die Zeit innerhalb der Karenz rechnen wir nach der *retrospektiven*, nachher nach der *prospektiven* Methode. Demnach ist

$${}_{10}V_{42} = \frac{N_{42+23}}{N_{42} - N_{65}} \cdot \frac{N_{42} - N_{42+10}}{D_{52}}$$

$$= {}^{*)}\, 0{\cdot}217891 \,.\, 12{\cdot}855 = 2{\cdot}801 \quad \text{und für die Rente } 1000 \,..\, 2\,801\ K$$

$${}_{15}V_{42} = \frac{N_{65}}{N_{42} - N_{65}} \cdot \frac{N_{42} - N_{57}}{D_{57}}$$

$$= 0{\cdot}217891 \,.\, 22{\cdot}26614 = 4{\cdot}851 \quad \text{„ „ „ „} \quad 1000 \,..\, 4\,851 \text{ „}$$

$${}_{22}V_{42} = \frac{N_{65}}{N_{42} - N_{65}} \cdot \frac{N_{42} - N_{64}}{D_{64}} = 9{\cdot}197 \quad \text{„ „ „ „} \quad 1000 \,..\, 9\,197 \text{ „}$$

$${}_{23}V_{42} = a_{65} = 10{\cdot}051 \quad \text{„ „ „ „} \quad 1000 \,.\, 10\,051 \text{ „}$$

$${}_{24}V_{42} = a_{66} = 9{\cdot}690 \quad \text{„ „ „ „} \quad 1000 \,..\, 9\,690 \text{ „}$$

$${}_{33}V_{42} = a_{75} = 6{\cdot}659 \quad \text{„ „ „ „} \quad 1000 \,..\, 6\,659 \text{ „}$$

Es zeigt sich, daß für eine aufgeschobene Leibrente die Prämienreserve während der Karenz stetig wächst, im Zeitpunkte des Flüssigwerdens der Rente das Maximum erreicht und sodann konstant abnimmt.

Ein 33-Jähriger hat für eine bis zum 60. Lebensjahr aufgeschobene Leibrente 17mal eine Jahresprämie von 500 K zu entrichten. Wie groß ist bei $9^1/_2$%igem Regiezuschlag die Prämienreserve nach 10, 20 und 30 Jahren?

In diesem Falle muß vorerst die Höhe der Rente ermittelt werden.

$${}_{27}a_{33} = P_{33} \cdot {}_{17}a_{33}$$

$$\frac{N_{60}}{D_{33}} = P_{33} \cdot \frac{N_{33} - N_{50}}{D_{33}}$$

$$P_{33} = \frac{N_{60}}{N_{33} - N_{50}} = \frac{111\,786{\cdot}3}{631\,205 - 238\,213} = 0{\cdot}28445$$

$$\underline{0{\cdot}02702} \quad 9^1/_2\%$$

$$500 : 0{\cdot}31147 = 1605\ K \text{ (vers. Rente).}$$

Wird die Prämienreserve nach der *prospektiven* Methode berechnet, so ist

$${}_{10}V_{33} = {}_{17|}a_{43} - P_{33} \cdot {}_{|7}a_{43}$$

$$= \frac{N_{60} - 0{\cdot}28445\,(N_{43} - N_{50})}{D_{43}} = 3{\cdot}5658 \quad \text{(Prämienreserve für „1")}$$

$${}_{20}V_{33} = {}_{7}a_{53} - 0 = \frac{N_{60}}{D_{53}} = 8{\cdot}2707, \quad {}_{30}V_{33} = a_{63} = 10{\cdot}778.$$

Die Prämienreserve für 1605 K beträgt somit

nach 10 Jahren . . . . 5 723·10 K
„ 20 „ . . . . 13 274·50 „ und
„ 30 „ . . . . 17 299·— „

Abgekürzte Leibrente.

$${}_{t}V({}_{n}a_{x}) = {}_{n-t}a_{x+}\ .$$

*) Nach der Rentner-Sterbetafel

§ 61.

Erlebensversicherung.

a) Gegen Einmalprämie.

Nach der *retrospektiven* Methode:

$${}_{t}V({}_{n}E_{x}) = {}_{n}E_{x} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}$$

b) Gegen n Jahresprämien.

Nach der *retrospektiven* Methode:

$${}_{t}V({}_{n}E_{x}) = P_x \cdot {}_{|t}a_x \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} : \frac{D_{x+t}}{N_x - N_{x+t}} = \frac{P({}_{n}E_x)}{P({}_{t}E_x)}.$$

Dies ist der Quotient aus der jährlichen Nettoprämie des x-Jährigen für eine Erlebensversicherung von n-jähriger Dauer durch die analoge Prämie von t-jähriger Dauer.

Diese Formel wird sich insbesondere dann mit Vorteil verwenden lassen, wenn die Jahresprämien für die verschiedenen Werte von t bereits berechnet sind.

Nach der *prospektiven* Methode:

$${}_{t}V({}_{n}E_{x}) = {}_{n-t}E_{x+t} - P_x \cdot {}_{|n-t}a_{x+t}.$$

Es ist für die Erlebensversicherung eines 37-Jährigen auf das vollendete 60. Lebensjahr im Betrage von 1000 K gegen Prämienzahlung während der ganzen Versicherungsdauer die Prämienreserve nach 1, 5, 10, 15, 20 und 23 Jahren zu bestimmen. — In Ermanglung der nötigen Nettoprämien berechnen wir die Prämienreserve nach der Formel

$${}_{1}V({}_{23}E_{37}) = \frac{D_{60}}{N_{37} - N_{60}} \cdot \frac{N_{37} - N_{38}}{D_{38}} = {}^{*)}\, 0{\cdot}023456 \,.\, 1{\cdot}0401 = 0{\cdot}02440$$

$${}_{5}V({}_{23}E_{37}) = \frac{D_{60}}{N_{37} - N_{60}} \cdot \frac{N_{37} - N_{42}}{D_{42}} = 0{\cdot}023456 \,.\, 5{\cdot}6474 = 0{\cdot}13246$$

$${}_{10}V({}_{23}E_{37}) = \frac{D_{60}}{N_{37} - N_{60}} \cdot \frac{N_{37} - N_{47}}{D_{47}} = 0{\cdot}023456 \,.\, 12{\cdot}643 = 0{\cdot}29655$$

$${}_{15}V({}_{23}E_{37}) = \frac{D_{60}}{N_{37} - N_{60}} \cdot \frac{N_{37} - N_{52}}{D_{52}} = 0{\cdot}023456 \,.\, 21{\cdot}567 = 0{\cdot}50589$$

*) Nach der Rentner-Sterbetafel.

$$_{20}V(_{23}E_{37}) = \frac{D_{60}}{N_{37} - N_{60}} \cdot \frac{N_{37} - N_{60}}{D_{57}} = \quad 0{\cdot}023456 \,.\, 33{\cdot}4033 = 0{\cdot}78351$$

$$_{23}V(_{23}E_{37}) = \frac{D_{60}}{N_{37} - N_{60}} \cdot \frac{N_{37} - N_{60}}{D_{60}} = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = 1.$$

Vergleicht man die Prämienreserve für die versicherte Summe 1000 mit den Werten der bis zum Zeitpunkte der Prämienreserve-Berechnung zu $3^1/_2\%$ aufgezinsten Nettoprämien ($23{\cdot}456 \,.\, \mathrm{T\,III}^{(t}_{3^1/_2})$), so sieht man, daß die letzteren durchwegs kleiner sind, denn es betragen

	die Prämienreserve	die aufgezinsten Nettoprämien
nach 1 Jahr	24·40 *K*	24·28 *K*
„ 5 Jahren	132·46 „	130·18 „
„ 10 „	296·55 „	284·80 „
„ 15 „	505·89 „	468·44 „
„ 20 „	783·51 „	686·54 „
„ 23 „	1000·— „	836·59 „

Der Grund für diese scheinbar widerspruchsvolle Tatsache — denn der Anstalt sind zwar innerhalb der 23 Jahre noch keinerlei Leistungen erwachsen, dafür hatte sie aber außer den Nettoprämien und Zinsen keinerlei Einnahmen — liegt darin, daß die Einzahlungen jener Personen, welche nach der Mortalitätstafel in den einzelnen Versicherungsjahren sterben, zugunsten der Überlebenden verfallen und deren Prämienreserve-Anteile erhöhen. So sind beispielsweise im 1. Versicherungsjahr an Prämien und Zinsen eingegangen

$$l_{37} \,.\, P_{37} \,.\, r = 95\,279 \,.\, 23{\cdot}46 \,.\, 1{\cdot}035 = 2\,313\,479;$$

von diesem Betrage entfällt aber auf den einzelnen Versicherten nicht der l_{37}^ste^, sondern der l_{38}^ste^ Teil, somit $\frac{2\,313\,479}{94\,810}$ 24·40.

In gleicher Weise läßt sich die Richtigkeit des Wertes $_5V$ kontrollieren:

$l_{37} \,.\, P_{37} = 95\,279 \,.\, 23{\cdot}456 =$	2 234 860	
hiezu $3^1/_2\%$ Zinsen .	78 220	
$l_{38} \,.\, P_{37} = 94\,810 \,.\, 23{\cdot}456 =$	2 223 870	(Prämieneinnahme im 2. Jahre)
	4 536 950	
$3^1/_2\%$ Zinsen . . .	158 794	
$l_{39} \,.\, P_{37} = 94\,321 \,.\, 23{\cdot}456 =$	2 212 400	(„ „ 3. „)
	6 908 144	
$3^1/_2\%$ Zinsen . . .	241 785	
$l_{40} \,.\, P_{37} = 93\,811 \,.\, 23{\cdot}456 =$	2 200 320	(„ „ 4. „)
	9 350 249	

Transport . .	9 350 249	
$3^1/_2\%$ Zinsen . . .	327 258	
$l_{41} \,.\, P_{37} = 93\,277 \,.\, 23{\cdot}456 =$	2 187 900	(Prämieneinnahme im 5. Jahre)
	11 865 407	
$3^1/_2\%$ Zinsen . . .	415 289	
	12 280 696	
	: 92 715 (= l_{42} = Lebende im Zeitpunkte der Reserveermittlung).	
	= 132·46	

§ 62.

Todesfallversicherungen.

a) Gegen Einmalprämie.

$$_tV(A_x) = A_{x+t} = 1 - d^{*)} \,.\, a_{x+t}.$$

b) Gegen lebenslängliche Prämienzahlung.

$$_tV(A_x) = A_{x+t} - P_x \,.\, a_{x+t}$$
$$= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = \left(\frac{M_{x+t}}{N_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x}\right) \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}$$
$$= [P(A_{x+t}) - P(A_x)] \,.\, a_{x+t}.$$

Diese Formel stellt das Produkt dar aus der vorschüssigen Leibrente des $x+t$-Jährigen und der Differenz zwischen den Nettoprämien für eine Todesfallversicherung des $x+t$-Jährigen und des x-Jährigen.

Die durch die Leibrente ausgedrückte Prämienreserve ist

$$_tV(A_x) = 1 - d\, a_{x+t} - ^{**)}\left(\frac{1}{a_x} - d\right) a_{x+t} = 1 - \frac{a_{x+t}}{a_x}.$$

Ein 35-Jähriger hat eine Todesfallversicherung auf 1000 *K* gegen lebenslängliche Prämienzahlung abgeschlossen; wie groß ist die Prämienreserve in den ersten 4 und nach 24 bis 27 Jahren?

Unter Benützung der Rentenformel ergibt sich

		Prämienreserve für 1000 *K*	Jährliche Zunahme	Prämienreserve nach 17 engl. Ges $3^1/_2\%$	Prämienreserve nach 17 engl. Ges 4%
$_1V(A_{35}) = 1 - \frac{a_{36}}{a_{35}}$	= 0·01548 .	15·48 *K*	15·48 *K*	12·49 *K*	11·49 *K*
$_2V(A_{35}) = 1 - \frac{17{\cdot}484}{18{\cdot}047}$	= 0·03122 .	31·20 „	15·74 „	25·35 „	23·34 „
$_3V(A_{35}) = 1 - \frac{17{\cdot}195}{18{\cdot}047}$	= 0·04721 .	47·21 „	15·99 „	38·59 „	35·59 „
$_4V(A_{35}) =$	0·06345 .	63·45 „	16·24 „	52·22 „	48.25 „

. . . .

*) Siehe S. 137.
**) Siehe S. 140.

		Prämienreserve für 1000 K	Jährliche Zunahme	Prämienreserve nach 17 engl. Gesellschaften 3½%	4%
$_{24}V(A_{35}) = 1 - \frac{a_{59}}{a_{35}}$	$= 0{\cdot}41963$	$419{\cdot}63\ K$		$390{\cdot}70\ K$	$374{\cdot}06\ K$
$_{25}V(A_{35}) = 1 - \frac{a_{60}}{a_{35}}$	$= 0{\cdot}43769$	$437{\cdot}69$ „	$18{\cdot}06\ K$	$409{\cdot}35$ „	$392{\cdot}53$ „
$_{26}V(A_{35}) = 1 - \frac{9{\cdot}8242}{18{\cdot}047}$	$= 0{\cdot}45562$	$455{\cdot}62$ „	$17{\cdot}93$ „	$428{\cdot}—$ „	$411{\cdot}02$ „
$_{27}V(A_{35}) = 1 - \frac{9{\cdot}1848}{18{\cdot}047}$	$= 0{\cdot}47341$	$473{\cdot}41$ „	$17{\cdot}79$ „	$446{\cdot}59$ „	$429{\cdot}52$ „

In welcher Weise der Zinsfuß die Höhe der Prämienreserve beeinflußt, ist aus den letzten zwei Kolonnen zu entnehmen.

Wie sich die Prämienreserve bei 3½%igen Rechnungsgrundlagen aus den Einlagen (Nettoprämie = 21·594) und Auszahlungen allmählich entwickelt, geht aus folgender Aufstellung hervor:

$l_{35} \,.\, P_{35} = 93\,048 \,.\, 21{\cdot}594 =$	2 009 316
3½% Zinsen	70 326
	2 079 642
ab $1000 \,.\, d_{35}$	649 000
	1 430 642 : 92 399 ($= l_{36}$)
	$= 15{\cdot}48 = {}_1V$
$l_{36} \,.\, P_{35} = 92\,399 \,.\, 21{\cdot}594 =$	1 995 260
	3 425 902
3½% Zinsen	119 907
	3 545 809
ab $1000 \,.\, d_{36}$	682 000
	2 863 809 : 91 717 ($= l_{37}$)
	$= 31{\cdot}20 = {}_2V$ usf.

c) Gegen abgekürzte Prämienzahlung.

α) $t < n$.

$$_tV(A_x) = A_{x+t} - P_x \,.\, {}_{|n-t}a_{x+t}$$

und bei Verwendung der Leibrentenwerte:

$$_tV(A_x) = 1 - d \,.\, a_{x+t} - P_x \,.\left(a_{x+t} - \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}}\right)$$

$$= 1 - a_{x+t}(d + P_x) + P_x \,.\, \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

β) $t > n$.

$$_tV(A_x) = A_{x+t} = 1 - d \,.\, a_{x+t}.$$

Ein 35-Jähriger hat eine Todesfallversicherung von 1000 K mit 25jähriger Prämienzahlung abgeschlossen. Wie groß ist die Prämienreserve im Vergleiche zu der obberechneten Kombination?

Verwendet man für $t < 25$ die Formel

$$_tV_{35} = 1 - a_{35+t}\left(0{\cdot}0338164 + \frac{M_{35}}{N_{35} - N_{60}}\right) + \frac{M_{35}}{N_{35} - N_{60}} \cdot \frac{N_{60}}{D_{35+t}}$$

$$= 1 - 0{\cdot}059406\ a_{35+t} + 2012{\cdot}899 : D_{35+t},$$

so erhält man als Prämienreserve

für die Einheit	für die versicherte Summe 1000	Jährliche Zunahme
$_1V_{35} = 1 - 0{\cdot}059406 \,.\, 17{\cdot}768 + \frac{2012{\cdot}899}{26\,780}$		
$= 1{\cdot}07516 - 1{\cdot}05553 = 0{\cdot}01963$	$19{\cdot}63\ K$	$19{\cdot}63\ K$
$_2V_{35} = 1{\cdot}07837 - 1{\cdot}03865 = 0{\cdot}03972$	$39{\cdot}72$ „	$20{\cdot}09$ „
$_3V_{35} = 1{\cdot}08175 - 1{\cdot}02149 = 0{\cdot}06026$	$60{\cdot}26$ „	$20{\cdot}54$ „
$_4V_{35} = 1{\cdot}08531 - 1{\cdot}00408 = 0{\cdot}08123$	$81{\cdot}23$ „	$20{\cdot}97$ „
. . . .		
$_{24}V_{35} = 1{\cdot}24242 - 0{\cdot}62221 = 0{\cdot}62021$	$620{\cdot}21\ K$	
$_{25}V_{35} = 1 - d \,.\, a_{60} = 0{\cdot}65683$	$656{\cdot}83$ „	$36{\cdot}62\ K$
$_{26}V_{35} = 1 - 0{\cdot}33223 = 0{\cdot}66777$	$667{\cdot}77$ „	$10{\cdot}94$ „

Es zeigt sich, was übrigens wohl vorauszusehen war, daß die Prämienreserve für eine Todesfallversicherung im Falle abgekürzter Prämienzahlung wesentlich rascher zunimmt als bei lebenslänglicher Prämienzahlung; diese reichlichere *Dotation* erreicht jedoch mit dem Ende der Prämienentrichtung das Maximum; die Zunahme in den folgenden Jahren ist erheblich kleiner als bei der früher besprochenen Kombination.

Aufgeschobene Todesfallversicherung.

a) Gegen Einmalprämie.

α) $t < k$.

$$_tV({}_{k|}A_x) = {}_{k-t|}A^{*)}_{x+t} = \frac{M_{x+t+k-t}}{D_{x+t}} = \frac{M_{x+k}}{D_{x+t}}.$$

β) $t > k$.

$$_tV({}_{k|}A_x) = A_{x+t} = 1 - d\,a_{x+t}.$$

b) Gegen lebenslängliche Prämienzahlung.

α) $t < k$.

---

*) Eine Todesfallversicherung für den $x + t$-Jährigen, die noch durch $k - t$ Jahre (t Jahre sind von der ursprünglichen Karenz k bereits abgelaufen) aufgeschoben ist.

Nach der *retrospektiven* Methode:

$$ {}_tV({}_{k|}A_x) = (P_x \,.\, {}_{|t}\mathrm{a}_x - 0)\,\frac{D_x}{D_{x+t}} $$

$$ = \frac{M_{x+k}}{\mathrm{N}_x}\cdot\frac{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+t}}{D_{x+t}}. $$

β) $t > k$.

$$ {}_tV({}_{k|}A_x) = A_{x+t} - P_x \,.\, \mathrm{a}_{x+t} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_{x+k}}{\mathrm{N}_x}\cdot\frac{\mathrm{N}_{x+t}}{D_{x+t}} $$

$$ = 1 - d\,\mathrm{a}_{x+t} - P_x \,.\, \mathrm{a}_{x+t} = 1 - \mathrm{a}_{x+t}\,(d + P_x). $$

Temporäre Todesfallversicherung.

a) Gegen Einmalprämie.

$$ {}_tV({}_nA_x) = {}_{n-t}A_{x+t} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}}. $$

b) Gegen Jahresprämien,

zahlbar während der ganzen Versicherungsdauer.

$$ {}_tV({}_nA_x) = {}_{|n-t}A_{x+t} - P_x \,.\, {}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} $$

$$ = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}\cdot\frac{\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+n}}{D_{x+t}} $$

und bei Verwendung der Rentenwerte:

$$ {}_tV({}_nA_x) = 1 - d\,\mathrm{a}_{x+t} - \frac{M_{x+n}}{D_{x+t}} - P_x\left(\mathrm{a}_{x+} - \frac{\mathrm{N}_{x+n}}{D_{x+t}}\right) $$

$$ = 1 - (d + P_x)\,\mathrm{a}_{x+t} - \frac{M_{x+n} - P_x \,.\, \mathrm{N}_{x+n}}{D_{x+t}} $$

Es ist die Prämienreserve für die auf S. 142 berechnete Schuld-(Deckungs-)Polizze zu bestimmen ($x = 40$, $n = 12$).

Rechnen wir nach der Rentenformel, dann ist

$$ {}_tV_{40} = 1 - (d + P_{40})\,\mathrm{a}_{40+t} - (M_{52} - P_{40} \,.\, \mathrm{N}_{52}) : D_{40+t} $$

$$ = 1 - [(0{\cdot}033816 + 0{\cdot}012731) \,.\, \mathrm{a}_{40+t} + (7193{\cdot}86 - 2063{\cdot}06) : D_{40+t}], $$

demnach

$$ {}_6V_{40} = 1 - \left(0{\cdot}046547 \,.\, 14{\cdot}743 + \frac{5130{\cdot}80}{17\,198}\right) $$
$= 0{\cdot}01542$ und für 1500 K 23·13 K

$$ {}_7V_{40} = 1 - \left(0{\cdot}046547 \,.\, 14{\cdot}422 + \frac{5130{\cdot}80}{16\,388}\right) $$
$= 0{\cdot}01562$ „ „ 1500 „ 23·43 „

$$ {}_8V_{40} = 1 - \left(0{\cdot}046547 \,.\, 14{\cdot}098 + \frac{5130{\cdot}80}{15\,602}\right) $$
$= 0{\cdot}01492$ und für 1500 K 22·38 K

$$ {}_{12}V_{40} = 1 - \left(0{\cdot}046547 \,.\, 12{\cdot}786 + \frac{5130{\cdot}80}{12\,674}\right) $$
$= 0$ „ „ 1500 „ 0 „

Die Prämienreserve einer temporären Todesfallversicherung ist, wie man sieht, außerordentlich geringfügig; sie nimmt anfangs zu, später wieder ab. Bei der Versicherung gegen Einmalprämie ist, wie man sich leicht überzeugen kann, ein ständiges Sinken zu konstatieren.

§ 63.

Gemischte Versicherung.

a) Gegen Einmalprämie.

$$ {}_tV(A_{x\overline{n|}}) = A_{x+t}{}^{*)} : \overline{{}_{n-t|}} = \frac{D_{x+n} + M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} $$

oder mit Beziehung auf S. 143

$$ {}_tV(A_{x\overline{n|}}) = 1 - d \,.\, {}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} = 1 - d\,\frac{\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+n}}{D_{x+t}}. $$

b) Gegen Jahresprämien,

zahlbar während der ganzen Versicherungsdauer.

$$ {}_tV(A_{x\overline{n|}}) = A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_x \,.\, {}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} $$

$$ = \frac{D_{x+n} + M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}\cdot\frac{\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+n}}{D_{x+t}} $$

oder unter Benützung der Rentenwerte

$$ {}_tV(A_{x\overline{n|}}) = 1 - d \,.\, {}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} - \left(\frac{1}{{}_{|n}\mathrm{a}_x} - d\right) . \, {}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} = 1 - \frac{{}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t}}{{}_{|n}\mathrm{a}_x}. $$

Es ist die Prämienreserve für eine gemischte Versicherung des 40-Jährigen auf das 60. Lebensjahr mit Prämienzahlung während der ganzen Versicherungsdauer zu bestimmen. (Siehe Beispiel S. 143.)

Nach der Rentenformel ist

$$ {}_tV_{40} = 1 - \frac{\dfrac{\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+n}}{D_{x+t}}}{\dfrac{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}{D_x}} = 1 - \frac{\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\frac{D_x}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}} $$

$$ {}_tV_{40} = 1 - \frac{\mathrm{N}_{40+t} - \mathrm{N}_{60}}{D_{40+t}}\cdot\frac{D_{40}}{\mathrm{N}_{40} - \mathrm{N}_{60}}. $$

---

*) Einmalprämie eines $x + t$-Jährigen für eine gemischte Versicherung mit $n - t$-jähriger Dauer.

$${}_1V_{40} = 1 - \frac{352\,550 - 78\,663}{21\,624} \cdot \frac{22\,593}{375\,143 - 78\,663} = 0\cdot03483$$

und für 1000 K . 34·83 K

$${}_2V_{40} = 1 - \frac{330\,926 - 78\,663}{20\,685} \cdot 0\cdot076202 = 0\cdot07072$$

und für 1000 K . 70·72 „

$${}_3V_{40} = 1 - \frac{310\,241 - 78\,663}{19\,774} \cdot 0\cdot076202 = 0\cdot10760$$

und für 1000 K . 107·60 „

${}_{10}V_{40} = 1 - 7\cdot8648 \,.\, 0\cdot076202 = 0\cdot40069$	. „ „ „ „ .	400·69	„
${}_{15}V_{40} = 1 - 4\cdot4335 \,.\, 0\cdot076202 = 0\cdot66216$	. „ „ „ „ .	662·16	„
${}_{18}V_{40} = 1 - 1\cdot9358 \,.\, 0\cdot076202 = 0\cdot85249$	. „ „ „ „ .	852·49	„
${}_{19}V_{40} = 1 - 1 \,.\, 0\cdot076202 = 0\cdot92380$	. „ „ „ „ .	923·80	„
${}_{20}V_{40} = 1 = 1$	. „ „ „ „ .	1000·—	„

§ 64.

Versicherung à terme fixe.

$${}_tV_x = \frac{1}{r^{n-t}} - P_x \cdot {}_{|n-t}a_{x+t} = \frac{1}{r^{n-t}} - \frac{D_x}{r^n(N_x - N_{x+n})} \cdot \frac{N_{n+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

Es ist zu der auf S. 144 besprochenen à terme fixe-Versicherung ($x = 40$, $n = 20$) die Prämienreserve pro 1000 K versicherte Summe zu bestimmen.

$${}_tV_{40} = \frac{1}{r^{20-t}} - P_{40} \cdot \overbrace{\frac{N_{40+t} - N_{60}}{D_{40+t}}}^{*)}$$

$$= \frac{1}{1\cdot035^{20-t}} - 0\cdot0382965 \frac{N_{40+t} - 78\,663}{D_{40+t}}$$

${}_1V_{40} = 0\cdot520156 - 0\cdot0382965 \,.\, 12\cdot666 = 0\cdot03509$	u. für 1000 K	35·09	K
${}_2V_{40} = 0\cdot538361 - 0\cdot0382965 \,.\, 12\cdot195 = 0\cdot07134$	„ „ „ „	71·34	„
${}_3V_{40} = 0\cdot557204 - 0\cdot448490 = 0\cdot10871$	„ „ „ „	108·71	„
${}_{10}V_{40} = 0\cdot708919 - 0\cdot301194 = 0\cdot40773$	„ „ „ „	407·73	„
${}_{15}V_{40} = 0\cdot841973 - 0\cdot169788 = 0\cdot67219$	„ „ „ „	672·19	„
${}_{18}V_{40} = 0\cdot933511 - 0\cdot074134 = 0\cdot85938$	„ „ „ „	859·38	„
${}_{19}V_{40} = 0\cdot966184 - 0\cdot038297 = 0\cdot92789$	„ „ „ „	927·89	„
${}_{20}V_{40} = 1 = 1\cdot—$	„ „ „ „	1000·—	„

Hiebei ist vorausgesetzt, daß der Versicherte das Ende der Versicherungsdauer erlebt; wäre er beispielsweise schon im 12. Jahre gestorben, dann wäre ${}_{15}V_{40} = \frac{1}{r^5} - 0 = 0\cdot84197$, beziehungsweise 841·97 K.

*) Dieser Faktor wurde bereits bei der unmittelbar vorangehenden Aufgabe ermittelt.

§ 65.

Versicherungen mit Prämienrückgewähr und verbundener Leben.

Erlebensversicherung.

Nach der *retrospektiven* Methode:

$${}_tV_x = \left[{}^r_nE_x - \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) {}^r_nE_x \cdot {}_{|t}A_x\right] \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

$$= {}^r_nE_x\left[1 - \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) {}_{|t}A_x\right] \frac{D_x}{D_{x+t}}.$$

Aufgeschobene Leibrente.

Nach der *retrospektiven* Methode:

$${}_tV_x = \left[{}^r_{k|}a_x - \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) {}^r_{k|}a_x \cdot {}_{|t}A_x\right] \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

$$= {}^r_{k|}a_x\left[1 - \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) {}_{|t}A_x\right] \frac{D_x}{D_{x+t}}.$$

Verbindungsrente.

$${}_tV(a_{xy}) = a_{x+t:y+t}.$$

Einseitige Überlebensrente

a) Gegen Einmalprämie.

$${}_tV(a_{x|y}) = a_{y+t} - a_{x+t:y+t}.$$

b) Gegen Jahresprämien.

$${}_tV(a_{x|y}) = a_{y+t} - a_{x+t:y+t} - P_{x|y} \,.\, a_{x+t:y+t} = a_{y+t} - (1 + P_{xy}) \,.\, a_{x+t:y+t}$$

oder auch

$${}_tV(a_{x|y}) = a_{y+t} - a_{x+t:y+t} - \left(\frac{a_y}{a_{xy}} - 1\right) a_{x+t:y+t}.$$

$$= a_{y+t} - a_{x+t:y+t} \cdot \frac{a_y}{a_{xy}}.$$

Es ist zu der auf S. 150 besprochenen Witwenpension ($x = 38$, $y = 35$, Pension 1200 K) die Prämienreserve nach 5 und 10 Jahren zu berechnen.

$${}_tV(a_{38|35}) = a_{35+t} - (1 + P_{38|35}) \,.\, a_{38+t:35+t}$$

$${}_5V(a_{38|35}) = a_{20} - 1\cdot3363\, a_{43:40}$$

$= 18\,421$*) $- 1\cdot3363 \,.\, 13\cdot513 = 0\cdot364$ und für 1200 K 436·80 K

$${}_{10}V(a_{38|35}) = a_{45} - 1\cdot3363 \,.\, a_{48:45}$$

$= 16\cdot931 - 1\cdot3363 \,.\, 12\cdot064 = 0\cdot810$ „ „ „ „ 972·— „

*) Rentnertafel.

In beiden Fällen ist vorausgesetzt, daß nicht nur die Frau, sondern auch der Mann noch lebt; wäre letzterer beispielsweise vor oder in dem 10. Jahre gestorben, dann wäre

$${}_{10}V = a_{45} - 0 = 16{\cdot}931 \text{ und für } 1200\ K \ .\ .\ 20\,317{\cdot}20\ K.$$

In dem Zeitpunkte, in welchem der Mann stirbt und die künftigen Prämienzahlungen in Wegfall kommen, steigt also die Prämienreserve plötzlich um ein sehr Bedeutendes, um dann von Jahr zu Jahr wieder abzunehmen.

Gegenseitige Überlebensrente.

a) Gegen Einmalprämie.

$${}_tV_{xy} = a_{x+t} + a_{y+t} - 2\,a_{x+t:y+t}.$$

b) Gegen Jahresprämien.

$$\begin{aligned} {}_tV_{xy} &= a_{x+t} + a_{y+t} - 2\,a_{x+t:y+t} - P_{xy}\,.\,a_{x+t:y+t} \\ &= a_{x+t} + a_{y+t} - (2 + P_{xy})\,a_{x+t:y+t} \\ &= a_{x+t} + a_{y+t} - a_{x+t:y+t}\left(2 + \frac{a_x + a_y - 2\,a_{xy}}{a_{xy}}\right) \\ &= a_{x+t} + a_{y+t} - \frac{a_x + a_y}{a_{xy}}\,.\,a_{x+t:y+t}. \end{aligned}$$

Wie groß ist die Prämienreserve des 3., 10. und 20. Jahres zu der auf S. 151 besprochenen gegenseitigen Überlebensrente ($x = 55$, $y = 50$, Rente 1500 K) unter der Voraussetzung, daß beide Personen am Leben sind?

$${}_tV = a_{55+t} + a_{50+t} - (2 + P_{55:50})\,a_{55+t:50+t}$$

$${}_3V = a_{58} + a_{53} - 2{\cdot}8515\,a_{58:53}$$

$$= 12{\cdot}582 + 14{\cdot}328 - 2{\cdot}8515\,.\,9{\cdot}2227 = 0{\cdot}611 \text{ u. für } 1500\ K \quad 916{\cdot}50\ K$$

$${}_{10}V = a_{65} + a_{60} - 2{\cdot}8515\,.\,a_{65:60} \quad \text{„ „ „ „} \ 2547{\cdot}\text{—} \ \text{„}$$

$${}_{20}V = a_{75} + a_{70} - 2{\cdot}8515\,.\,a_{75:70} \quad \text{„ „ „ „} \ 3204{\cdot}\text{—} \ \text{„}$$

Ist im 20. Versicherungsjahre y gestorben, dann ist

$${}_{20}V = a_{75} = 6{\cdot}6595 \text{ und für } 1500\ K \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 9\,989{\cdot}25\ K,$$

wäre aber x bereits tot und y am Leben, dann wäre

$${}_{20}V = a_{70} = 8{\cdot}2853 \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 12\,428{\cdot}\text{—} \ \text{„}.$$

Gegenseitige Überlebensversicherung.

a) Gegen Einmalprämie.

$${}_tV(A_{xy}) = 1 - d\,a_{x+t:y+t}.$$

b) Gegen Jahresprämien.

$${}_tV_{(xy)} = 1 - d\,.\,a_{x+t:y+t} - P_{xy}\,.\,a_{x+t:y+t} = 1 - (d + P_{xy})\,a_{x+t:y+t}.$$

Nun ist

$$P_{xy} = \frac{1}{a_{xy}} - d,$$

demnach

$${}_tV(A_{xy}) = 1 - \frac{a_{x+t:y+t}}{a_{xy}}.$$

Wie groß ist für die gegenseitige Überlebensversicherung auf S. 152 ($x = 50$, $y = 40$, Kapital 14 000 K) die Prämienreserve nach 12 Jahren, wenn

α) noch beide Personen am Leben sind?

$${}_{12}V = 1 - (0{\cdot}033816 + 0{\cdot}048071)\,a_{62:52}$$

$$= 1 - 0{\cdot}081887\,.\,8{\cdot}5079 = 0{\cdot}303314 \text{ und für } 14\,000\ K \quad 4246{\cdot}40\ K$$

β) x gestorben ist und y lebt?

$${}_{12}V = 1 - d\,a_{52} = 1 - 0{\cdot}033816\,.\,14{\cdot}667 = 0{\cdot}50402 \ .\ .\ .\ .\ .\ 7056{\cdot}28 \ \text{„}$$

γ) y gestorben ist und x lebt?

$${}_{12}V = 1 - d\,a_{62} = 1 - 0{\cdot}033816\,.\,11{\cdot}141 = 0{\cdot}62326 \ .\ .\ .\ .\ .\ 8725{\cdot}64 \ \text{„}$$

§ 66.

Abfindungswerte.

Die Berechnung der auf eine bestimmte Versicherung entfallenden Prämienreserve erweist sich auch dann als nötig, wenn ein Vertrag vor Eintritt des versicherten Ereignisses *storniert*, d. h. das Vertragsverhältnis zwischen Anstalt und Versichertem vorzeitig gelöst wird. Das Assekuranz-Regulativ bestimmt nämlich im § 12:

„1. Polizzen, welche mindestens drei Jahre in Kraft sind, . .*). . dürfen wegen Einstellung der Prämienzahlung nicht ohne Entgelt storniert werden;

2. das Entgelt hat nach Wahl des Versicherten entweder in der Gewährung einer *Rückkaufssumme* oder in der *Ausstellung einer prämienfreien Polizze* mit reduzierter Versicherungssumme, beziehungsweise Rente zu bestehen, ...

3. im Falle des Rückkaufes hat die Rückkaufssumme, wenn dieselbe mit einer gleichbleibenden Quote während der ganzen Dauer der Versicherung bemessen wird, mindestens drei Viertel der Prämienreserve zu betragen; wenn die Rückkaufssumme aber nach einer mit der Versicherungsdauer bis zur Höhe der vollen Prämienreserve steigenden Skala berechnet wird, so hat diese mit einer Quote von mindestens 60% der Prämienreserve zu beginnen;

---

*) „ausschließlich solcher für temporäre Versicherungen"; z. B. bei einer temporären Todesfallversicherung, wo das Kapital möglicherweise überhaupt nicht fällig wird.

4. im Falle der *Reduktion* der Versicherung ist die reduzierte Versicherungssumme, beziehungsweise Rente unter Zugrundelegung der vollen auf die Versicherung entfallenden Prämienreserve, oder bei gemischten Versicherungen im Verhältnisse der abgelaufenen Versicherungsjahre zu der im Vertrage festgesetzten Versicherungsdauer zu berechnen".

Die praktische Bedeutung dieser Bestimmungen soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Ein 35-Jähriger hat eine Todesfallversicherung auf 1000 K gegen lebenslängliche Prämienzahlung abgeschlossen, ist aber wegen mißlicher finanzieller Verhältnisse nach Entrichtung der 25. Prämie nicht mehr in der Lage, die Prämienzahlung fortzusetzen. Auf welches Entgelt hat er Anspruch?

Entscheidet er sich für den Rückkauf und beträgt die Rückkaufsquote durchwegs 80% der Prämienreserve, dann erhält er, da für diese Versicherung gemäß S. 164 $_{25}V = 437\cdot69$,

$$437\cdot69 \,.\, 0\cdot8 = 350\cdot15 \; K.$$

Anstatt dieser baren Abfindungssumme kann er eine Polizze auf eine Todesfallversicherung mit entsprechend geringerem Kapital erhalten, für welche keinerlei Prämien mehr zu entrichten sind (prämienfreie Reduktionspolizze). Die Ermittlung dieser reduzierten Versicherungssumme ist identisch mit der Frage: welches Kapital erhält ein 60-Jähriger (Alter im Zeitpunkte der Prämieneinstellung) gegen eine einmalige Einlage von 437·69 K versichert?

$$A_{60} = 1 - d\,a_{60} = 1 - 0\cdot033816 \,.\, 10\cdot148 = 0\cdot65683;$$

legen wir einen Regiezuschlag von 10% zugrunde, so folgt als reduzierte Versicherungssumme 437·69 : 0·72251 = 606 K.

Eine gemischte Versicherung vom 40. auf das 60. Lebensjahr (siehe S. 168) wird nach 15jähriger Prämienzahlung storniert. Wie groß ist

a) die reduzierte Versicherungssumme?

b) der Rückkaufsbetrag, wenn derselbe nach einer mit 60% der Prämienreserve beginnenden und mit jedem Versicherungsjahr um 2% steigenden Skala zu berechnen ist?

ad *a)* Das Verhältnis der abgelaufenen Versicherungsjahre zu der im Vertrage festgesetzten Versicherungsdauer ist 15 : 20, sohin ergibt sich der Reduktionsbetrag aus der Proportion

$$15 : 20 = x : 1000 \text{ mit } 750 \; K.$$

ad *b)* Nach 15 Jahren sind als Rückkauf zu gewähren:

$$60 + 2 \,.\, 15 = 90\%$$

der Prämienreserve, d. s.

$$662\cdot16 \,.\, 0\cdot9 = 595\cdot94 \; K.$$

Eine immer mehr in Übung kommende Art der Abfindung besteht in der *Umwandlung der Versicherung in eine prämienfreie Versicherung für den vollen Betrag, aber mit beschränkter Versicherungsdauer.* In diesem Falle wird der volle Betrag der Prämienreserve als einmalige Prämie zu dem Zwecke verwendet, um den Versicherungsnehmer in der Höhe der ursprünglich vereinbarten Summe zu versichern, jedoch nur für jenen Zeitraum, für den diese einmalige Prämie als Deckung des Versicherers ausreicht.

Ein 38-Jähriger hat eine Todesfallversicherung auf 5000 K gegen 25jährige Prämienzahlung abgeschlossen. Wie lange bleibt er auf die volle Summe versichert, wenn er nach 10 Jahren die Prämienzahlung einstellt und bei der Umwandlung ein 10%iger Regiezuschlag angerechnet wird?

Die Prämienreserve

$$_{10}V_{38} = A_{48} - P_{38} \cdot {}_{15}a_{48}$$

setzt die Kenntnis der Nettoprämie voraus; diese bestimmt sich aus der Gleichung

$$A_{38} = P_{38}\,{}_{25}a_{38}$$

mit

$$P_{38} = \frac{M_{38}}{N_{38} - N_{63}} = \frac{10\,304\cdot72}{423\,355 - 56\,991} = 0\cdot028127.$$

Sohin ist

$$_{10}V_{38} = \frac{M_{48} - 0\cdot028127\,(N_{48} - N_{63})}{D_{48}} = 0\cdot22942$$

und die Prämienreserve für 5000 K . . . 1 147·10 K.

Dieser Betrag ist nun als Einmalprämie für eine auf ω Jahre abgekürzte Todesfallversicherung per 5000 K des 48-Jährigen zu verwenden. Es ist somit

$$({}_{\omega}A_{48} + 0\cdot1\;{}_{\omega}A_{48})\,5000 = 1147\cdot10$$

oder

$$1\cdot1\,\frac{M_{48} - M_{48+\omega}}{D_{48}} = 0\cdot22942$$

und $M_{48+\omega} = 4909\cdot-$.

Da $M_{60} = 5091\cdot55$ und $M_{61} = 4820\cdot15$,

ist $48 + \omega \begin{matrix} > 60 \\ < 61 \end{matrix}$ und $\omega \begin{matrix} > 12 \\ < 13 \end{matrix}$ Jahre.

Betrachtet man die zwischen M_{60} und M_{61} liegenden Werte als Glieder einer arithmetischen Reihe, so folgt für $\omega = 12$ Jahre, 6 Monate, 3 Tage.

Stirbt der Versicherte während dieses Zeitraumes, so hat die Anstalt die volle versicherte Summe (5000 K) zu bezahlen; tritt aber der Tod in dieser Zeit nicht ein, so erlischt mit dem Ablauf derselben jede Zahlungsverbindlichkeit für die Anstalt.

§ 67.

Kürzung der Prämienreserve. („Zillmerei".)

Während die Verwaltungskostenzuschläge in normalen Zeiten hinreichen, auch die mit der Anwerbung neuer Versicherungsverträge verbundenen Kosten (Abschlußprovisionen und Ärztehonorare) zu decken, müssen sie jetzt bei den so außerordentlich gesteigerten Regieaufwendungen fast gänzlich für die laufenden Auslagen verwendet werden. Ein Verzicht auf den Abschluß des Neugeschäftes würde zum allmählichen Verschwinden eines der mächtigsten Zweige unserer ganzen Volkswirtschaft — der Lebensversicherung — führen. Eine Erhöhung der Regiezuschläge und damit der Prämien kann bei den in Kraft stehenden Verträgen nicht vorgenommen werden, käme also nur bei Neuabschlüssen in Frage und würde daher den Anstalten nur allmählich neue Mittel zuführen, wogegen bei ihnen augenblicklich das dringendste Bedürfnis nach Abhilfe besteht; überdies sind den Prämienerhöhungen im Hinblicke auf den Sparcharakter sehr vieler Versicherungen gewisse Grenzen gezogen. Aus allen diesen Erwägungen hat die Staatsverwaltung mit der Vollzugsanweisung vom 26. April 1919 die Möglichkeit geschaffen, daß, wie die amtliche Verlautbarung hiezu besagt, „auf Grund einer in jedem einzelnen Falle besonders zu erwirkenden Genehmigung der Aufsichtsbehörde" eine anfängliche Kürzung der Bilanzreserve bis zum Höchstsatze von $12^1/_2{}^0/_{00}$ der Versicherungssumme bei Erlebensversicherungen und von $17^1/_2{}^0/_{00}$ bei Todesfall- und gemischten Versicherungen vorgenommen werden darf. Diesem im Deutschen Reiche schon seit langem geltenden Rechte — der sogenannten „Zillmerei" — liegt die Erwägung zugrunde, daß es eigentlich unbillig ist, die beim Vertragsabschlusse auflaufenden namhaften Kosten nicht auf eine längere Zeit verteilen zu dürfen, sondern sofort zur Gänze decken zu müssen. Diesem Verlangen könnte auf zweifache Weise entsprochen werden: Entweder dadurch, daß die Abschlußprovisionen als Aktivum in der Bilanz vorgetragen und innerhalb eines gewissen Zeitraumes amortisiert werden — diese Möglichkeit sieht das Versicherungsregulativ für neugegründete Versicherungsgesellschaften bereits vor —, oder daß an Stelle dieser sich allmählich verringernden Aktivpost eine ebenfalls von Jahr zu Jahr abnehmende Kürzung der Prämienreserve Platz greift. Da gegen eine zeitliche Begrenzung der Kürzung Einwendungen erhoben wurden und das Erscheinen von Vortragsposten in den Bilanzen unbegründete Beunruhigung hätte erwecken können, wurde auch in Anlehnung an das deutsche Muster der zweite Weg gewählt.

Beim Übergang von der bisher nur allein zulässig gewesenen Nettoprämien-Methode zur „Zillmerei" wird im ersten Versicherungsjahre die Betriebsrechnung nahezu von dem ganzen der „Zillmerei" zugeführten Teil der Abschlußprovisionen entlastet. Der gezillmerte Betrag muß aber in den folgenden Versicherungsjahren entsprechend den mit den Prämien eingehenden Tilgungszuschlägen nach und nach wieder abgeschrieben werden; ebenso ist für die Storni der ganze noch ungetilgte Betrag sofort abzuschreiben und die Reduktions-, Rückkaufs- und Darlehenswerte werden, soferne hiebei von der Prämienreserve ausgegangen wird, auch in Hinkunft ausschließlich nach der Nettoprämien-Methode zu berechnen sein.

§ 68.

Rechnungsabschluß.

Gemäß § 31 des Assekuranz-Regulativs hat der Rechnungsabschluß einer Versicherungsanstalt zu bestehen:

1. Aus der Betriebsrechnung (Gewinn- und Verlustkonto);
2. aus der Bilanz.

Form und Inhalt des Rechnungsabschlusses bei Lebensversicherungs-Gesellschaften hat im wesentlichen den auf S. 176 bis 179 abgedruckten Formularien zu entsprechen.

Zu denselben ist, soweit sich die Erklärung nicht schon aus der Nomenklatur ergibt, folgendes zu bemerken:

Unter Post VI der Betriebsausgaben sowie 6 der Passiva (*Reserve für schwebende Schadenzahlungen* oder kurz *„Schadenreserve"* genannt) ist „der zur Bedeckung bereits fälliger Leistungen aus Versicherungsverträgen erforderliche Betrag" einzustellen. Wenn nämlich beispielsweise gegen Schluß des Rechnungsjahres der Anstalt ein Todesfall angezeigt wird, die Liquidierung des versicherten Kapitales aber wegen der noch ausstehenden Dokumente (Totenschein, ärztliches Zeugnis etc.) nicht mehr im Laufe desselben Jahres erfolgen kann, dann ist für diese Versicherung nicht die *Prämienreserve*, sondern das versicherte Kapital als *Reserve für schwebende Schadenzahlungen* in den Rechnungsabschluß einzusetzen.

Nachdem die Bilanzen stets für den Schluß eines *Kalenderjahres* aufgestellt werden, dieses aber nur selten mit dem *Versicherungsjahr* zusammenfällt, ergibt sich die Notwendigkeit, die Prämienreserve nicht nur für ganze Jahre, sondern auch für Bruchteile derselben zu berechnen.

Soll beispielsweise am 31. Dezember 1919 die Prämienreserve für die Polizze eines Versicherten bestimmt werden, welcher am 16. März 1882 geboren und am 1. Juni 1917 der Anstalt beigetreten ist, so hat man zu erwägen, daß dieser Versicherte bei der Aufnahme 35 Jahre und $2^1/_2$ Monate (sohin noch nicht $35^1/_2$ Jahre) alt war,

Betriebs-Rechnung.

(Gewinn- und Verlust-Konto.)

Ausgaben.

I. Auszahlungen für fällige Versicherungen und Renten:
1. Todesfall- und gemischte Versicherungen
2. Erlebensfallversicherungen . . . .
3. Rentenversicherungen . . . .
4. Sonstige Versicherungen . . . .

II. Auszahlungen für rückgekaufte Polizzen . .

III. Dividendenzahlungen an Versicherte . . . .

IV. Regieauslagen:
1. Organisationskosten . . . .
2. Akquisitionskosten . . . .
3. Laufende Verwaltungskosten . . . . . .
4. Inkassoprovisionen . . . .
5. Ärztekosten . . . .
6. Steuern und Gebühren . . . .

V. Abschreibungen und andere Ausgaben:
1. Abschreibungen . . . .
2. Kursverlust . . . .
3. Sonstige Ausgaben . . . .

VI. Reserve für schwebende Schadenzahlungen:
1. Todesfall- und gemischte Versicherungen
2. Erlebensfallversicherungen . . . .
3. Sonstige Versicherungen . . . .

VII. Stand der Fonds am Schlusse des Rechnungsjahres:
1. Prämienreserve:
   - *a)* Todesfall- u. gemischte Versicherungen
   - *b)* Erlebensfallversicherungen . . . . .
   - *c)* Rentenversicherungen . . . .
   - *d)* Sonstige Versicherungen . . . . . .
2. Prämienüberträge:
   - *a)* Todesfall- u. gemischte Versicherungen
   - *b)* Erlebensfallversicherungen . . . . .
   - *c)* Rentenversicherungen . . . .
   - *d)* Sonstige Versicherungen . . . . . .
3. . . . . . .
4. . . . . . . (alle Gewinst-, Kapitalsreserven etc.)
   . . . . . .

VIII. Überschuß aus der Jahresgebarung . . . . .

Einnahmen.

I. Übertrag der Fonds vom Vorjahre:
1. Prämienreserve . . . .
2. Prämienüberträge . . . .
3. . . . . . .
4. . . . . . . (alle Gewinst-, Kapitalsreserven etc.)
   . . . . . .

II. Reserve für schwebende Schadenzahlungen vom Vorjahre

III. Prämieneinnahme:
1. Todesfall- und gemischte Versicherungen . .
2. Erlebensfallversicherungen . . . .
3. Rentenversicherungen . . . .
4. Sonstige Versicherungen . . . .

IV. Erträgnis der Kapitalsanlagen:
1. Darlehens- und Eskomptezinsen, sowie Zinsen von Einlagen bei Kreditinstituten und Sparkassen
2. Zinsen von Darlehen auf Polizzen . . . . . .
3. Zinsen von Hypothekardarlehen . . . .
4. Zinsen von Effekten . . . .
5. Reinerträgnis von Realitäten . . . .

V. Andere Einnahmen:
1. Verwaltungseinnahmen . . . .
2. Kursgewinn . . . .
3. Sonstige Einnahmen . . . .

VI. Abgang aus der Jahresgebarung . . . .

Bilanz.

Aktiva.

1. Forderungen an die Aktionäre für nicht eingezahltes Aktienkapital		
2. Kassastand		
3. Disponible Guthaben bei Kreditinstituten und Sparkassen		
4. Realitäten: Bruttowert		
hievon ab: darauf lastende Hypothekarschulden		
5. Wertpapiere zum Kurswerte am Schlusse des Rechnungsjahres		
hiezu: laufende Zinsen		
6. Wechsel im Portefeuille		
7. Hypothekardarlehen		
8. Darlehen auf Wertpapiere		
9. Darlehen auf eigene Polizzen		
10. Darlehen an Genossenschaften		
11. Kautionsdarlehen an Versicherte		
12. Pensionsfonds der Bediensteten		
13. Aktivsaldi der Rechnungen mit den Rückversicherern		
14. Ausstände bei Agenturen und Filialen		
15. Diverse Debitoren		
16. Wert des Inventars nach erfolgter Abschreibung		
17.		
18. Unbedeckter Abgang		

Passiva.

1. Emittiertes Aktienkapital (Gründungsfonds)		
2. Gewinst-, Kapitalsreserven:		
a)		
b)		
3. Kursdifferenzenfonds		
4. Prämienreserve		
5. Prämienüberträge		
6. Reserve für schwebende Schadenzahlungen		
7. Dividendenfonds der Versicherten		
8. Pensionsfonds der Bediensteten		
9. Passivsaldi der Rechnungen mit den Rückversicherern		
10. Diverse Kreditoren		
11.		
12. Überschuß aus der Jahresgebarung		

demnach als 35-Jähriger aufgenommen worden und am 31. Dezember 1919 die Prämienreserve für den 35-Jährigen nach 2 Jahren und 7 Monaten zu ermitteln ist. — Unter der Annahme, daß sich die Vermehrung, welche die Prämienreserve vom Schluß des einen Versicherungsjahres zuzüglich der sofort fälligen nächstjährigen Prämie bis zum Schluß des anderen Versicherungsjahres erfährt, auf das letztere gleichmäßig verteilt, ist der Wert der fraglichen Prämienreserve

$$ {}_{2\frac{7}{12}}V_{35} = {}_2V_{35} + P_{35} + \frac{7}{12}[{}_3V_{35} - ({}_2V_{35} + P_{35})] $$

$$ = \left[{}_2V_{35} + \frac{7}{12}({}_3V_{35} - {}_2V_{35})\right] + \frac{5}{12}P_{35}. $$

Der Klammerausdruck [ ] stellt die sogenannte *Bilanzreserve* dar und die Summe der auf alle Versicherungsverträge entfallenden, derart berechneten Werte ist als *Prämienreserve* unter Post VII_1 der Betriebsausgaben, beziehungsweise Post 4 der Passiva auszuweisen.

Zu einem noch einfacheren Ergebnis der Ermittlung der *Bilanzreserve* führt die folgende, in der Praxis häufig angewendete Methode:

Wir nehmen an, es würde im Jahre 1919 in der Mitte jedes Monates ein Versicherter vom Alter 40 beitreten und fragen nach der *Bilanzreserve* dieser 12 identischen Verträge am 31. Dezember 1922.

Auf die im

Jänner abgeschlossene Versicherung entfällt $_3V_{40} + \frac{11 \cdot 5}{12}({}_4V_{40} - {}_3V_{40})$

Februar „ „ „ $_3V_{40} + \frac{10 \cdot 5}{12}({}_4V_{40} - {}_3V_{40})$

März „ „ „ $_3V_{40} + \frac{9 \cdot 5}{12}({}_4V_{40} - {}_3V_{40})$

usf.

Auf die im

Dezember „ „ „ $_3V_{40} + \frac{0 \cdot 5}{12}({}_4V_{40} - {}_3V_{40})$

und auf alle 12 Verträge:

$$ 12 \,.\, {}_3V_{40} + \frac{72}{12}({}_4V_{40} - {}_3V_{40}) = 6 \,.\, {}_4V_{40} + 6 \,.\, {}_3V_{40}. $$

Nach diesem Resultat braucht man nicht die *Bilanzreserve* für alle 12 Verträge einzeln zu ermitteln, sondern hat einfach für die (6) im 1. Semester Beigetretenen die Reserve für 4 und für die im 2. Semester Beigetretenen für 3 Jahre einzustellen; oder allgemein:

unter der Annahme, daß sich die Beitritte zur Versicherungsanstalt über das ganze Jahr gleichmäßig verteilen, kann man bei der Ermittlung der Versicherungsdauer (Zeit vom Eintritt bis zum Bilanztermin) einen Zeitraum von 6 bis 12 Monaten als volles Jahr zählen und einen solchen unter 6 Monaten ganz vernachlässigen.

Der 3. Summand in der Formel S. 175 stellt jenen Teil der Jahresnettoprämie vor, welcher bereits auf das nächste *Bilanzjahr* entfällt (vom 1. Jänner bis 31. Mai). Diese schon eingezahlten, jedoch erst das folgende Jahr betreffenden Prämienteile heißen *Prämienüberträge* und sind unter Post VII_2 der Betriebsausgaben sowie unter 5 der Passiva einzustellen. Zu bemerken ist jedoch, daß nicht die Netto-, sondern die *Bruttoprämienüberträge* (also einschließlich der vorausbezahlten Regiekostenbeiträge) im Rechnungsabschluß auszuweisen sind.

Wird die Jahresprämie in unterjährigen Raten entrichtet, so ist als Prämienübertrag nur der von der unterjährigen Rate auf das nächste Jahr entfallende Prämienteil auszuweisen, also z. B. wenn der am 1. Juni Beigetretene die Prämie vierteljährig (am 1. Juni, 1. September, 1. Dezember, 1. März) bezahlt, zwei Drittel der Vierteljahresprämie (pro Jänner und Februar).

Zinsen von Darlehen auf Polizzen — Post IV_2 der Betriebseinnahmen — sind von jenen Versicherten zu entrichten, welche auf Grund ihrer Polizzen von der Anstalt Darlehensbeträge erhalten (ihre Polizzen „belehnt") haben. Die Versicherungs-Gesellschaften sind nämlich nach dem Assekuranz-Regulativ zur Gewährung von „Darlehen auf eigene Lebensversicherungs-Polizzen, jedoch keinesfalls über den Betrag des Rückkaufswertes" berechtigt. Der Betrag der bei Bilanzschluß an die Versicherten gewährten Darlehen ist unter 9 der Aktiva als *Darlehen auf eigene Polizzen* auszuweisen.

Der *Pensionsfonds* der Anstalts-Bediensteten ist nicht Eigentum der Gesellschaft, sondern wird von dieser nur verwaltet und ist demnach als durchlaufende Post sowohl in die Aktiva wie in die Passiva einzustellen.

Als Erklärung der *Saldi der Rechnungen mit den Rückversicherern* diene folgendes:

Die meisten Versicherungs-Gesellschaften haben in ihren Statuten eine Bestimmung, wonach sie Versicherungssummen nur bis zu einer bestimmten Höhe auf eigenes Risiko versichern und den darüber hinausgehenden Betrag an andere Gesellschaften in Rückdeckung oder *Rückversicherung* geben. Wenn z. B. eine Anstalt auf eigene Rechnung Versicherungen bis zum Höchstbetrage von 50 000 K abschließt und bei ihr eine Versicherung auf 60 000 K beantragt und von ihr auch angenommen wird, so stellt sie wohl dem Versicherten eine seinerzeit bei ihr einzulösende Polizze über 60 000 K aus, gibt

aber 10 000 *K* samt der hierauf entfallenden Prämie an eine andere Anstalt in Rückversicherung. Tritt das versicherte Ereignis ein, dann hat die erste Anstalt 60 000 *K* zu bezahlen, erhält aber von dem *Rückversicherer* 10 000 *K*. Die aus diesen gegenseitigen Verrechnungen sich ergebenden Saldi sind naturgemäß in die Bilanz einzustellen.

Als *Ausstände bei Agenturen und Filialen* sind jene Forderungen nachzuweisen, welche der Anstalt aus der Verrechnung mit ihren Agenten und Organen erwachsen.

Aufgaben-Sammlung.

Einfache Zinsenrechnung.

1. Auf welchen Betrag wachsen 450 *K* an, wenn sie vom 4. März bis 18. November zu 4% verzinst werden?
2. Wie lange müssen 1000 *K* zu $5^3/_8$% verzinst werden, um 50 *K* Zinsen zu geben?
3. 300 *K* werden zu $1^3/_4$% pro Semester verzinst; welcher Betrag resultiert hieraus in $2^1/_4$ Jahren?
4. Welches Kapital wächst bei einer jährlichen Verzinsung von $3^1/_2$% in 7 Monaten und 15 Tagen auf 3600 *K* an?
5. Zu welchem Zinsfuß müssen 3000 *K* angelegt werden, um in $1^3/_4$ Jahren auf 3200 *K* anzuwachsen?

Zinseszinsen- und Annuitäten-Rechnung.

Den folgenden Aufgaben liegt, soferne nichts anderes vermerkt ist, *dekursive* Verzinsung zugrunde.

6. Welches sind die Aufzinsungsfaktoren von $^1/_4$, $^2/_3$, $2^1/_4$, $2^5/_8$%?
7. Auf welchen Betrag wachsen 900 *K* in 9 Jahren *a)* bei $3^3/_4$, *b)* bei $5^5/_8$%iger Verzinsung an?
8. Eine Sparkasse verzinst die Einlagen mit $3^1/_2$%, schlägt aber die $1^3/_4$%igen Zinsen halbjährig zum Kapital. Welches Guthaben resultiert in diesem Falle aus einer Einlage von 360 *K* nach $3^1/_2$ Jahren.
9. 320 *K* werden zu 4% durch 11 Jahre verzinst. Wie groß sind die in dieser Zeit aufgelaufenen Zinsen?
10. Welcher Betrag ergibt, zu $3^3/_4$% verzinst, in 7 Jahren ein Guthaben von 580 *K*?
11. Wie lange müssen 180 *K* zu $1^3/_4$% pro Semester verzinst werden, damit sie 45·54 *K* an Zinsen tragen?
12. Zu welchem Zinsfuß müssen 540 *K* durch 15 Jahre verzinst werden, damit hieraus *a)* 904·69 *K*, *b)* 950 *K* resultieren?

13. Jemand hinterläßt einer Gemeinde 300.000 *K* zur Erbauung eines Krankenhauses mit der Bestimmung, daß mit dem Bau erst begonnen werden darf, wenn entweder durch eine anderweitige Schenkung oder durch bloße Verzinsung ein Betrag von 400.000 *K* vorhanden ist. Wie lange muß mit dem Bau noch gewartet werden, wenn lediglich die $4\frac{1}{2}\%$igen Zinsen zufließen?
14. Wann kann mit dem Bau begonnen werden, wenn die Gemeinde das freie Verfügungsrecht über 1% der auflaufenden Zinsen besitzt und nach 3 Jahren noch 50.000 *K* unter den gleichen Bedingungen gewidmet werden?
15. Bei welchem Zinsfuß verdoppelt sich ein Kapital in 15, 20, 25 Jahren?
16. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital zu $4\frac{3}{8}\%$?
17. Es ist die Bedeutung des in Tabelle I, S. 5 unter $4\frac{1}{2}\%$ beim Termin 10 angegebenen Wertes zu erklären.
18. 840 *K* werden durch 9 Semester zu 2% und in den folgenden Semestern zu $1\frac{3}{4}\%$ verzinst. Wie groß ist das Guthaben mit Schluß des 15. Semesters?
19. 500 *K* sind zuerst mit 4, dann mit $3\frac{1}{2}\%$ verzinst worden und binnen 12 Jahren auf 785·22 *K* angewachsen. Wie lange dauerte die 4%ige und wie lange die $3\frac{1}{2}\%$ige Verzinsung?
20. Es ist zu dem Jahreszinsfuß von $5\frac{3}{4}\%$ der konforme Semester-, Quartals- und Monatszinsfuß zu bestimmen.
21. Welcher konforme Monatszinsfuß entspricht einer Verzinsung von 2% pro Semester?
22. Eine Sparkasse verzinst die Einlagen mit $2\frac{1}{8}\%$ pro Semester; wie groß ist die tatsächliche Jahresverzinsung?
23. Wie lange müssen 3600 *K* zu 4% verzinst werden, damit sie auf 4600 *K* anwachsen? (Auch nach der gemischten Verzinsung zu ermitteln.)
24. Ein 35jähriger Mann hat an eine Versicherungsgesellschaft einen einmaligen Betrag von 405·60 *K* zu entrichten, wofür seinen Angehörigen bei seinem Tode 1000 *K* ausbezahlt werden. Wie lange müßte der Versicherte leben, damit aus diesem Vertrage für ihn der gleiche Vorteil resultierte, als wenn er seine Einlage einer eine $3\frac{3}{4}\%$ige Verzinsung gewährenden Sparkasse übergeben hätte?
25. Welches Kapital ergibt bei 4%iger Verzinsung in 7 Jahren 400 *K* an Zinsen?
26. Was bedeutet der in Tabelle II unter 3% angegebene Wert 0·7224 . . .?
27. Für eine Realität bietet *A* 40 000 *K* sofort, *B* 20 000 *K* gleich und nach $1\frac{1}{4}$ Jahren 21 000 *K* und *C* 30 000 *K* nach 1 Jahr und 15 000 *K* nach $2\frac{1}{2}$ Jahren. Welches Angebot ist bei einer

4%igen Verzinsung für den Verkäufer am günstigsten? (Nach beiden Methoden.)
28. Jemand hat nach 8 Jahren eine Zahlung von 9000 *K* zu leisten. Mit welchem Betrage könnte er sich unter Zugrundelegung einer 2%igen Semesterverzinsung der Schuld sofort entledigen?
29. Jemand möchte sich der ihm obliegenden Zahlungen von 1000 *K* nach 3 Jahren, 800 *K* nach 4 und 1200 *K* nach 6 Jahren durch eine einmalige Zahlung *a)* sofort und *b)* nach 5 Jahren entledigen. Welchen Betrag hätte er bei einer Verzinsung von $4\frac{1}{4}$ $(4\frac{3}{8})\%$ zu erlegen?
30. Die Stadt O . . . hat am 1. März 1919 mittels Kaufvertrages die bisher in Privatbesitz befindlichen Beleuchtungsanlagen in ihr Eigentum übernommen und sich verpflichtet zu zahlen: 225 000 *K* sofort, 125 000 *K* am 1. März 1920, 130 000 *K* am 1. September 1924, 60 000 *K* am 1. März 1925 und 50 000 *K* am 1. Juni 1926. Wann hätte unter Zugrundelegung einer 4%igen Verzinsung die ganze Kaufsumme auf einmal erlegt werden können?
31. Welcher Zahlungstermin ergibt sich, wenn in Nr. 30 nach der gemischten Verzinsungsmethode gerechnet wird?
32. Ein Versicherter hat zeitlebens alljährlich im vorhinein eine Prämie von 73·60 *K* zu bezahlen, wogegen bei seinem Ableben ein Betrag von 3000 *K* fällig wird. *a)* Auf welchen Betrag wären die Einlagen nach 15 Jahren in der Sparkasse bei einer 4%igen Verzinsung angewachsen? *b)* Wann ist der Endwert der geleisteten Einzahlungen samt $3\frac{1}{2}\%$igen Zinseszinsen gleich dem versicherten Kapital?
33. Jemand erlegt jeweils am 1. Jänner, und zwar vom Jahre 1915 bis 1922 je 450 *K*. Wie groß ist bei $4\frac{1}{4}\%$iger Verzinsung das Guthaben am 31. Dezember 1927?
34. Es ist die Bedeutung des Wertes $T\,III_{1\frac{3}{4}}^{(30}$ zu erklären.
35. Es ist der Wert $T\,III_{4}^{(80}$ zu ermitteln.
36. Die Aufgabe 32 ist unter Zugrundelegung eines $4\frac{1}{8}\%$igen Zinsfußes zu lösen.
37. Jemand erlegt 3000 *K* und am Anfang der folgenden 10 Jahre je 300 *K*. Wie groß ist bei 4%iger Verzinsung das Guthaben mit Schluß des 15. Jahres?
38. Welche erstmalige Einlage ist in Nr. 37 erforderlich, wenn das Guthaben 6000 *K* betragen soll?
39. Wie groß muß in Nr. 37 jede der 10 Einlagen sein, wenn das Guthaben 8000 *K* betragen soll?
40. Es ist zu beweisen, daß die Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem durch Interpolation aus Tabelle III gefundenen Zinsfuß mit zunehmender Terminanzahl größer wird.
41. Welche Einlage ist 5mal *a)* am Jahresanfang, *b)* am Jahresende

zu leisten, damit bei einer Verzinsung von 4% für die 5 Jahre 360 *K* an Zinsen sich ergeben?

42. Welcher Betrag müßte bei einer $4^1/_4$%igen Verzinsung 12mal *a)* am Jahresanfang, *b)* am Jahresschlusse erlegt werden, damit für den Schluß des 16. Jahres ein Guthaben von 16 000 *K* resultiert?
43. Wie groß sind die in 7 Jahren auflaufenden 4%igen Zinsen von 800 *K*? (Mit Tabelle III zu berechnen.)
44. Wie viele Einlagen à 100 *K* und wie viele à 200 *K* müssen durch 12 Jahre jeweils am Anfang geleistet werden, damit bei einer $3^5/_8$%igen Verzinsung am Schlusse des 12. Jahres ein Guthaben von 2081·98 *K* resultiert?
45. Wie viele Jahresprämien à 340 K könnten entrichtet werden, damit der auf S. 25 besprochene Versicherungsvertrag noch eine 2%ige Jahresverzinsung ergibt?
46. Zu welchem Zinsfuß müßten 8 jeweils am Jahresanfang geleistete Einlagen à 300 *K* verzinst werden, damit sich für den Schluß des 8. Jahres ein Guthaben von 2763·30 *K* ergibt?
47. Welcher Zinsfuß liegt der vorstehenden Aufgabe zugrunde, wenn das aus den 8 Einlagen resultierende Guthaben am Schlusse des 12. Jahres 3400 *K* beträgt?
48. Für ein 4jähriges Kind ist längstens durch 20 Jahre eine jährliche Vorhineinprämie von 35·40 *K* zu zahlen, damit bei vollendetem 24. Lebensjahr 1000 *K* Versicherungssumme fällig werden; bei früher eintretendem Tode werden die eingezahlten Prämien (ohne Zinsen) rückerstattet. Ist der Abschluß eines solchen Versicherungsvertrages empfehlenswert, wenn in der Sparkasse mit einer mindestens 4%igen Verzinsung gerechnet werden kann?
49. Jemand erlegt bei einer Sparkasse am 1. April 1915 100 *K* und am 1. April jedes der folgenden 7 Jahre um 5% weniger als im vorangehenden Jahre. Wie groß ist unter Anrechnung von $3^3/_4$% Zinsen das Guthaben *a)* am 31. März 1923; *b)* am 31. März 1926?
50. Um welchen konstanten Betrag müssen die Einlagen in Nr. 49 zu- oder abnehmen, damit sich für den 31. März 1923 ein Guthaben von 2000 *K* ergibt?
51. Auf welchen Betrag wachsen 10 jeweils *a)* am Jahresanfang, *b)* am Jahresschlusse entrichtete Einlagen à 300 *K* bei 2%iger Semesterverzinsung bis zum Schlusse des 10. Jahres an?
52. Welcher Betrag muß 12mal *a)* am Anfange, *b)* am Ende jedes Jahres erlegt werden, damit bei einer $1^3/_4$%igen Semesterverzinsung für den Schluß des 16. Jahres ein Guthaben von 10 000 *K* sich ergibt?
53. 500 *K* werden durch 15 Semester jeweils am Anfang erlegt und zu 4% pro Jahr verzinst. Wie groß ist das Guthaben *a)* mit Schluß des 15. Semesters, *b)* am Ende des 20. Semesters?

54. Welche Änderungen würden die Resultate in Nr. 53 erfahren, wenn mit dem relativen Zinsfuß gerechnet würde?
55. Wie groß sind die Endwerte in Nr. 53, wenn die Einlagen jeweils am Schlusse des Halbjahres geleistet werden?
56. Aus den im § 10 abgeleiteten Schlußformeln ist die Größe *n* zu bestimmen.
57. Jemand erlegt bei einer Sparkasse jeweils am 1. Mai, und zwar: 1915 8000 *K*, 1916 1500 *K*, 1918 4000 *K* und 1921 2400 *K* und nimmt heraus am 30. April 1917 900 *K* und am 30. April 1920 3600 *K*. Wie groß ist bei $4^1/_2$%iger Verzinsung das Guthaben am 30. April 1922?
58. Ein 50jähriger Mann erlegt 45 000 *K* und nach 3 Jahren noch 20 000 *K*. Welchen Betrag könnte er vom 60. Lebensjahre an alljährlich im vorhinein abheben, damit bei vollendetem 75. Lebensjahre noch 8000 *K* vorhanden sind? (Zinsfuß $3^3/_4$%.)
59. Wie lange könnten von einem zu 4% angelegten Kapital von 30 000 *K* jeweils am Jahresanfang 1200 *K* abgehoben werden?
60. Es ist die Bedeutung des in Tabelle IV unter $4^1/_2$% angegebenen Wertes 11·2340 . . . zu erklären.
61. Durch welche jährliche Nachhinein-Annuität wird ein Kapital von 375 000 *K* bei $4^1/_4$%iger Verzinsung in 33 Jahren getilgt?*)
62. Welches Kapital wird durch 60 Semester-Annuitäten à 500 *K* bei $1^3/_4$%iger Verzinsung pro Semester amortisiert?*)
63. Wie viele Jahres-Annuitäten à 858·20 *K* sind erforderlich, um ein Kapital von 10 000 *K* bei 4%iger Verzinsung zu tilgen?*)
64. Welcher Betrag ist nötig, um *a)* bei 2%iger Semesterverzinsung durch 20 Semester eine Rente von 500 *K*; *b)* bei 4%iger Jahresverzinsung durch 10 Jahre eine Rente von 1000 *K* zu beziehen?
65. Es ist nachzuweisen, daß 2694·99 *K* gerade ausreichen, um durch 6 Jahre eine vorschüssige Rente von 500 *K* bei $4^1/_2$%iger Verzinsung zahlen zu können.
66. Eine Schuld von 100 000 *K* ist in 40 gleichgroßen, nachschüssigen Quartalsraten zu bezahlen. Wie groß ist bei $4^1/_4$%iger Jahresverzinsung eine solche Rate *a)* unter Verwendung des *relativen*, *b)* des *konformen* Zinsfußes?
67. Ein am 31. Oktober 1919 fälliger Betrag von 7645·28 *K* kann auch durch gleich große, jeweils am letzten Monatstage vom 31. Oktober 1924 bis 31. Dezember 1928 zu entrichtende Raten bei 4%iger Verzinsung p. a. abgestattet werden. Wie groß ist eine solche Monatsrate *a)* nach dem *relativen*, *b)* nach dem *konformen* Zinsfuße?

*) Mit Hilfe der Tabelle III zu lösen.

68. Welches Kapital ist erforderlich, damit hievon bei einer $1^3/_4$%igen Semester-Verzinsung 12mal *a)* am Jahresschlusse, *b)* am Jahresanfang eine Rente von 1500 *K* bezogen werden kann?
69. Welchen Betrag muß man zu 4% p. a. anlegen, um durch 20 Semester eine halbjährig im nachhinein zahlbare Rente von 600 *K* zu erhalten?
70. Um welchen Betrag erhöhen sich die Monatsraten in Aufgabe 67, wenn die Zahlungen erst am 31. Jänner 1925 beginnen?
71. Ein Haus wirft einen jährlichen Bruttozins von 23 280 *K* ab und steht noch 9 Jahre im Genuß der „Steuerfreiheit". Wenn nun für die Erhaltung 10%, an voller Steuer 38% und während der Steuerfreiheit 22% des Bruttozinses jährlich in Abzug zu bringen sind, wie groß ist bei einer $4^1/_2$%igen Kapitalisierung der Schätzwert des Hauses?
72. Wie groß ist der Schätzwert dieses Hauses, wenn während der Steuerfreiheit in den ersten 3 Jahren 14% und in den letzten 6 Jahren 18·5% an Steuern zu entrichten sind?
73. Wie lange kann jemand gegen eine einmalige Einlage von 5460·73 *K* eine halbjährig im nachhinein zahlbare Rente von 600 *K* bei $1^3/_4$%iger Verzinsung beziehen?
74. Jemand hat Anspruch auf eine sofort beginnende, 15mal jährlich im vornhinein zahlbare Rente von 1200 *K*, wünscht die erste Rate aber erst nach 5 Jahren zu beziehen. Wie groß ist unter Zugrundelegung eines $4^1/_2$%igen Zinsfußes eine Rate dieser aufgeschobenen Rente, wenn dieselbe *a)* 15mal; *b)* nur 10mal ausbezahlt wird?
75. Es ist der Wert einer aufgeschobenen ewigen Rente abzuleiten.
76. Auf einem Landgute haftet die Verpflichtung zur Instandhaltung von öffentlichen Straßen alle 3 Jahre einen Betrag von 8000 *K* zu bezahlen. Mit welchem Betrage könnte diese Verpflichtung bei einer 4%igen Verzinsung abgelöst werden, wenn *a)* die Zahlungsdauer unbeschränkt, *b)* auf 60 Jahre beschränkt ist?
77. Ein der Pensionsversicherung unterliegender Privatbeamter hätte für den Einkauf einer Reihe von Dienstjahren am 1. Februar 1918 1874·60 *K* zu erlegen gehabt. Er ersuchte, sofort nur 300 *K*, den Rest aber in 8 gleich großen Quartalsraten, beginnend am 31. März 1918, bezahlen zu dürfen. Wie groß ist eine solche Rate, wenn die Berechnung auf Grund einer 4%igen Jahresverzinsung, u. zw. *a)* nach dem *relativen*, *b)* nach dem *konformen* Zinsfuß durchgeführt wird?
78. Der Dienstjahreeinkauf in Nr. 77 möchte so durchgeführt werden, daß ab 1. Februar 1918 5 Quartalsraten à 300 *K* und der Rest am 31. Dezember 1920 zu leisten wären. Wie groß ist die Restzahlung?

79. Eine halbjährig im vorhinein fällige Rente von 500 *K* soll in Hinkunft *a)* monatlich im vorhinein; *b)* vierteljährig im nachhinein; *c)* jährlich im vorhinein ausbezahlt werden. Wie groß ist eine Rate bei 4%iger jährlicher Verzinsung?
80. Eine durch 12 Semester jeweils im nachhinein fällige Rente von 720 *K* soll in eine nach 2 Jahren beginnende und durch 10 Jahre monatlich im vorhinein zahlbare Rente umgewandelt werden. Wie groß ist dieselbe bei $3^3/_4$%iger Verzinsung?
81. Es ist der Barwert einer nach 3 Jahren mit 500 *K* beginnenden und 8mal um je 100 *K* steigenden jährlichen Rente zu berechnen ($p = 4$).
82. Wie groß ist der antizipative Aufzinsungsfaktor für $^1/_2$, 1, $1^5/_8$, 4%?
83. Es ist zu dem dekursiven Zinsfuß von $3^1/_4$, $3^3/_4$ und $4^1/_2$% der äquivalente antizipative Zinsfuß zu bestimmen.
84. Welcher äquivalente dekursive Zinsfuß entspricht einer $3^1/_4$-, beziehungsweise $3^3/_4$%igen antizipativen Verzinsung?
85. Es ist zu dem Jahreszinsfuß von $5^3/_4$% antizipativ der *konforme* Semester-, beziehungsweise Monatszinsfuß zu ermitteln.
86. Der Monatszinsfuß von $^3/_8$% antizipativ ist in den *konformen* Quartals-, beziehungsweise Jahreszinsfuß zu verwandeln.
87. Es ist nachzuweisen, daß es gleichgiltig ist, ob man zu dem dekursiven Jahreszinsfuß von 4% den entsprechenden antizipativen Jahres- und dazu den *konformen* antizipativen Semester-Zinsfuß oder aber zu dem 4%igen dekursiven Zinsfuß den äquivalenten dekursiven Semester-Zinsfuß und hiezu den entsprechenden antizipativen Zinsfuß ermittelt.
88. Für die Rückzahlung eines Kapitals von 30 000 *K* durch 7 gleich große jährliche Nachhinein-Annuitäten bei $4^1/_4$%iger Verzinsung ist der Tilgungsplan aufzustellen.
89. Welche Semester-Annuität müßte 70mal entrichtet werden, um hiemit bei $1^3/_4$%iger Verzinsung ein Kapital von 60 000 *K* zu tilgen?
90. Wie lautet zu vorstehender Aufgabe der Tilgungsplan für das 20. und 35. Semester?
91. Eine Gemeinde nimmt für Schulbauzwecke ein Darlehen von 120 000 *K* auf und will dasselbe durch jährliche Nachhinein-Zahlungen von $6^1/_2$% des Anfangskapitales tilgen. Wann ist bei einer *a)* $4^1/_2$%igen; *b)* 4%igen Verzinsung die Schuld getilgt?
92. Wie lautet zu vorstehender Aufgabe der Tilgungsplan für das 10. und letzte Jahr?
93. Ein Defizit von 74 857 *K* ist durch 10 gleich große Jahres-Annuitäten zu tilgen. Wie groß ist eine solche bei $4^1/_8$%iger Verzinsung?
94. Auf welchen Betrag beläuft sich in der vorstehenden Aufgabe das Defizit noch nach 5 Jahren?

95. In welcher Zeit wird *a)* bei einer 4%igen, *b)* bei einer $4^1/_4$%igen Verzinsung ein Anlehen durch eine den Zinsfuß um $^1/_2$, $^3/_4$, $1^1/_4$, $1^1/_2$% übersteigende Annuität getilgt?
96. Eine wievielprozentige Annuität ist erforderlich, damit ein Anlehen in 50 Semestern *a)* bei einer 2%igen, *b)* bei einer $2^1/_8$%igen Verzinsung amortisiert wird?
97. Bei welchem Zinsfuß wird ein Kapital von 30 000 *K* durch eine jährliche Annuität von 1811·49 *K* in 27 Jahren amortisiert?
98. Ein Anlehen von 250 000 *K* soll durch 20 jährliche Nachhinein-Annuitäten bei $4^1/_8$%iger Verzinsung getilgt werden. Wie groß sind die im 12. Jahre zu entrichtenden Zinsen?
99. Welche Zahlung obliegt im Falle der Amortisierung eines Anlehens von 35 000 *K* bei $4^1/_4$%iger Verzinsung durch eine jährliche Annuität von 5000 *K* dem Schuldner im letzten Jahre?
100. Wann ist ein mit 4% verzinsliches und in 2%igen Amortisationsraten rückzahlbares Darlehen von 300 000 *K* zur Hälfte getilgt?
101. Ein Darlehen von 80 000 *K* ist bei 2%iger Verzinsung pro Semester derart zu tilgen, daß während der ersten 5 Jahre jeweils nur die Zinsen, vom 6. Jahre an aber auch gleich große Annuitäten und zwar durch 70 Semester entrichtet werden. Wie lautet der Tilgungsplan für die ersten 8 und letzten 2 Jahre?
102. Die vorstehende Frage ist unter der Voraussetzung zu beantworten, daß in den ersten 5 Jahren überhaupt keine Zahlung geleistet wird, sondern die in dieser Zeit aufgelaufenen Zinsen der Annuität angelastet werden.
103. Ein am 1. Jänner 1907 begebenes Darlehen von 30 000 *K* ist bei $4^1/_4$%iger Verzinsung derart zu tilgen, daß durch 25 Jahre jeweils im nachhinein eine gleich große Annuität und am 9. Oktober 1932 eine kleinere Schlußrate und außer der Annuität ein Regiebeitrag von $^1/_4$% des jeweiligen Schuldrestes entrichtet wird. Wie lautet der Tilgungsplan in den ersten und letzten 2 Jahren?
104. Welche Durchschnittsverzinsung würde sich ergeben, wenn in Aufgabe 88 außer der Annuität noch ein jährlicher Regiebeitrag von $^1/_4$% des jeweiligen Schuldrestes zu entrichten wäre?
105. Das unter Nr. 88 angeführte Anlehen sei in Obligationen à 400 *K* geteilt. Es ist der Tilgungsplan unter gleichzeitiger Nachweisung des jeweiligen Restes aufzustellen.
106. Ein Anlehen von 700 000 *K* ist in 1000 Obligationen à 200 *K*, 500 Stücke à 400 und 300 Stücke à 1000 *K* geteilt und in 10 Ziehungen bei 4%iger Verzinsung und Einlösung der Obligationen zum Nennwerte zu tilgen. Wie lautet der Tilgungsplan?
107. Es ist für die vorstehende Aufgabe der Tilgungsplan nach Analogie der auf Seite 65 gegebenen Darstellung unter jeweiliger Aufrechterhaltung des bei der Begebung des Anlehens zwischen der Anzahl der verschiedenartigen Appoints bestehenden Verhältnisses aufzustellen.

108. Das unter Nr. 105 angeführte Anlehen soll derart getilgt werden, daß auf die gezogenen Obligationen kein Zinsencoupon mehr entfällt ($E = 383$ *K*).
109. Ein Darlehen von 90 000 *K* ist bei $4^1/_2$%iger Verzinsung in 6 Jahren derart zu tilgen, daß das Gesamterfordernis jedes Jahres 1000 *K* größer ist als das vorhergehende. Wie lautet der Tilgungsplan?
110. Für ein am 16. Juli 1918 begebenes, bei 4%iger antizipativer Verzinsung in 8 gleich großen nachschüssigen Jahres-Annuitäten zurückzuzahlendes Hypothekardarlehen von 50 000 *K* ist der Tilgungsplan aufzustellen.
111. Die Aufgabe 95 ist bei antizipativer Verzinsung zu lösen.
112. Ein am 1. Mai 1914 begebenes Anlehen von 100 000 *K* ist bei einer $3^1/_2$%igen antizipativen Verzinsung durch eine jährliche Nachhinein-Annuität von 6000 *K* zu tilgen. Wie lautet der Tilgungsplan für den 1. Mai 1922 und bezüglich der 3 letzten Zahlungen?
113. Die Aufgabe 96 ist bei antizipativer Verzinsung zu lösen.
114. Es ist die Frage sub Nr. 101 bei antizipativer Verzinsung und Nachhinein-Annuitäten zu beantworten. (Begebungstag 1. Jänner 1914.)
115. Ein in 1000 Obligationen à 400 *K* zerlegtes Anlehen ist bei 4%iger antizipativer Verzinsung unter Einlösung der Schuldverschreibungen zum Nennwerte in 8 Ziehungen zu tilgen. (Emittierung 1. März 1920.) Wie lautet der Tilgungsplan?
116. Ein in 400 Obligationen à 500 *K* zerlegtes Anlehen ist in 6 jeweils am 1. Februar stattfindenden Ziehungen bei $2^1/_4$%iger antizipativer Verzinsung und Einlösung der Obligationen mit 525 *K* zu tilgen. (Begebung 1. Februar 1920.)
117. Für ein durch 20 Vorhinein-Annuitäten à 4000 *K* bei 4%iger antizipativer Verzinsung zu amortisierendes Anlehen von 65 000 *K* ist der Tilgungsplan für die ersten 5 Jahre aufzustellen. (Begebungstag 1. Juli 1920.)
118. Es ist für ein am 1. Oktober 1914 begebenes, bei $2^1/_4$%iger antizipativer Verzinsung in 45 Semestern durch gleich große Vorhinein-Annuitäten zurückzuzahlendes Anlehen von 80 000 *K* der Tilgungsplan für den 1. Oktober 1920 und 1930 aufzustellen.
119. Ein aus 7500 Losen à 400 *K* bestehendes Lotterieanlehen soll durch 8 Ziehungen derart getilgt werden, daß bei jeder Ziehung 1 Los mit 30 000 *K*, 2 Lose mit je 10 000 *K* und 10 Lose mit je 2000 *K* gezogen, die übrigen Lose aber in den beiden ersten Ziehungen zum Nennwerte, in der Folge mit 410 *K* eingelöst werden. Wie lautet der Tilgungsplan?

120. Welcher Durchschnittsverzinsung entspricht die Einlösung nach vorstehender Aufgabe?
121. Das in Nr. 119 angeführte Darlehen ist derart zu tilgen, daß auf den größten Treffer in der 1. Ziehung 15 000 K und in jeder folgenden um 5000 K mehr als in der vorhergehenden Ziehung entfallen.
122. Ein aus 20 000 Losen à 200 K bestehendes Anlehen soll in 10 Ziehungen derart getilgt werden, daß die Lose bis zu ihrer Ziehung mit $1^3/_4\%$ verzinst und in jeder Ziehung 1 Los mit 25 000 K, 2 Lose mit je 10 000 K und 7 mit je 1000 K, die übrigen Lose aber zum Nominalbetrag eingelöst werden. Wie lautet der Tilgungsplan?
123. Ein gegen $4^1/_2\%$ige dekursive Verzinsung und Tilgung in 33 gleich großen Jahres-Annuitäten begebenes Anlehen von 90 000 K wird nach Entrichtung der 10. Annuität auf 4% konvertiert. Wie lautet der Tilgungsplan für das 10., 11., 12. und letzte Jahr, wenn *a)* die Annuität, *b)* die Tilgungsdauer verringert wird?
124. Wie lautet die Lösung der vorstehenden Aufgabe bei antizipativer Verzinsung?
125. Ein Anlehen von 70 000 K ist bei 4%iger dekursiver Verzinsung gegen eine gleich große Jahres-Annuität von 3500 K zu tilgen. Nach Entrichtung der 15. Annuität wird der Zinsfuß auf $3^1/_2\%$ ermäßigt. Wie lautet nunmehr der Tilgungsplan für die letzten 3 Jahre, wenn die bisherige Annuität auch weiterhin bezahlt wird?
126. Die vorstehende Aufgabe ist bei antizipativer Verzinsung zu lösen.
127. Ein gegen 2%ige Semesterverzinsung ausgeliehenes Kapital ist nach 20 Jahren fällig. Zu welchem Kurs (gegen welche Zuzählungsgebühr) muß das Anlehen begeben werden, damit eine $2^1/_4\%$ige Rentabilität sich ergibt?
128. Wie groß wäre der Begebungskurs von Nr. 127 bei antizipativer Verzinsung?
129. Ein bei 4%iger dekursiver Verzinsung durch 30 Annuitäten zu tilgendes Anlehen wird zum Kurse von $95^1/_2$ begeben. Wie groß ist die tatsächliche Verzinsung?
130. Zu welchem Kurs müßte vorstehendes Anlehen übernommen werden, damit sich eine $4^1/_4\%$ige Rentabilität ergibt?
131. Aufgabe 129 ist bei antizipativer Verzinsung zu lösen.
132. Zu welchem Kurs müßte ein bei einer 2% antizipativen Verzinsung durch 40 Annuitäten zu amortisierendes Anlehen übernommen werden, damit eine $2^1/_4\%$ige Verzinsung resultiert?
133. Ein 4%iges Darlehen ist durch eine 6%ige Annuität zu tilgen. Welcher Begebungskurs würde einer $4^1/_4$ $(3^3/_4)\%$igen Rentabilität entsprechen?

134. Ein $3^1/_2\%$ig antizipativ zu verzinsendes Darlehen ist durch eine $5^1/_2\%$ige Annuität zu tilgen. Bei welchem Begebungskurs würde eine 4%ige Verzinsung erzielt?
135. Bei einem gegen 30 Annuitäten zu tilgenden $4^1/_4\%$igen Anlehen ist noch ein $^1/_4\%$iger Regiebeitrag zu entrichten. Wie groß ist die Rentabilität, wenn *a)* das Darlehen *al pari*, *b)* zum Kurse von 99 begeben wird?
136. Welche Rentabilitäten liegen vor, wenn das Darlehen Nr. 135 gegen eine 5%ige Annuität getilgt wird?
137. Ein Anlehen ist durch 45 Vorhinein-Semester-Annuitäten derart zu amortisieren, daß außer einer 2%igen antizipativen Verzinsung noch ein $^1/_8\%$iger Regiebeitrag geleistet werden muß. Wie groß ist die Rentabilität, wenn *a)* die Begebung *al pari*, *b)* zu $98^1/_2$ erfolgt?
138. Welche effektiven Verzinsungen werden erzielt, wenn das Darlehen Nr. 137 durch eine 4%ige Semester-Annuität getilgt wird?
139. Ein 4%iges Obligationen-Anlehen ist in 40 Ziehungen zu amortisieren. Bei welchem Kurse ergibt sich eine $4^1/_2\%$ige Rentabilität nach 5, 15, 25 und 35 Jahren?
140. Ein durch 50 Semester-Annuitäten zu tilgendes Anlehen von 80 000 K kann bei 2%iger dekursiver Verzinsung *al pari* begeben werden. Wie groß wäre der Kurs bei $1^3/_4\%$iger Verzinsung?
141. Der Übernahmskurs des vorstehenden Anlehens wäre bei 2%iger Verzinsung 98·50. Es ist der Paritätskurs für $1^3/_4\%$ zu bestimmen.
142. Die vorstehende Aufgabe ist bei antizipativer Verzinsung zu lösen.
143. Ein nicht rückzahlbares Staatsanlehen kann bei $4^1/_2\%$iger Verzinsung zum Kurse von $98^3/_4$ emittiert werden. Wie hoch sollte sich der Kurs bei $3^1/_2\%$iger Verzinsung stellen?
144. Ein in 25 Jahres-Annuitäten zu tilgendes Anlehen würde von A zum Kurse von 98 bei 4%iger und von B zum Kurse von $93^1/_4$ bei $3^1/_2\%$iger dekursiver Verzinsung übernommen. Welches der beiden Offerte ist für den Schuldner günstiger?
145. Wie lautet bei antizipativer Verzinsung die Antwort auf die vorstehende Frage?
146. Welcher Regiebeitrag könnte in Nr. 144 bei dem für den Schuldner günstigeren Offert noch eingehoben werden, damit zwischen beiden Angeboten Parität besteht?
147. Welches wäre der Paritätskurs eines noch 29 Jahre laufenden Obligationen-Anlehens, wenn 4%ige Staatsanleihe 84·20 notiert?

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

148. In einer Urne befinden sich 4 schwarze, 3 weiße und 6 rote Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit *a)* eine weiße Kugel zu ziehen? *b)* eine rote Kugel nicht zu ziehen?
149. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Kassette, welche 8 Kronenstücke aus dem Prägejahr 1894, 12 Kronenstücke aus dem Jahre 1896 und 16 Kronenstücke aus dem Jahre 1901 enthält, auf einen Zug eine Münze der beiden erstgenannten Prägejahre zu ziehen.
150. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, aus den 6 Zahlen 1 bis 6 auf einen Zug 2 Zahlen zu ziehen, deren Summe 6 ergibt?
151. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln auf einen Wurf in Summe mindestens 8 und höchstens 10 zu werfen?
152. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, aus der in Nr. 148 erwähnten Urne eher eine weiße als eine schwarze Kugel zu ziehen.
153. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiel mit 32 Karten 2mal nacheinander einen König zu ziehen, wenn die zuerst gezogene Karte *a)* wieder zurückgegeben, *b)* beiseite gelegt wird?
154. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 4 weißen, 3 schwarzen und 2 roten Kugeln auf einen Zug eine weiße und eine schwarze Kugel zu ziehen?
155. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der letztgenannten Urne auf den ersten Zug eine schwarze und auf den zweiten Zug eine weiße Kugel zu ziehen? (Die gezogene Kugel wird zurückbehalten.)
156. Warum sind die Wahrscheinlichkeiten der Aufgaben 154 und 155 nicht identisch?
157. In der Urne U_1 befinden sich 3 weiße und 5 schwarze, in der Urne U_2 2 weiße und 2 schwarze und in der Urne U_3 7 weiße, 6 schwarze und 3 rote Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei geschlossenen Augen aus einer dieser Urnen eine schwarze Kugel zu ziehen?
158. Die Urne U_3 in Nr. 157 enthalte keine schwarzen Kugeln. Wie groß ist nunmehr die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel aus einer der 3 Urnen?
159. A erhält von B 25 h in dem Falle, wenn er mit 2 Würfeln auf einen Wurf die Summe 7 trifft. Welchen Betrag hätte im Falle des Verlierens A an B zu zahlen?
160. A gewinnt, wenn er einen Würfel dreimal derart wirft, daß die Fläche mit den 5 Augen obenauf zu liegen kommt. In welchem Außmaß haben A und B zu dem gemeinsamen Einsatz von 10·80 beizusteuern?

161. Es ist der Wert eines Loses des in Nr. 122 genannten Anlehens unmittelbar vor der 3. und 8. Ziehung zu bestimmen.
162. Ein Los des letzterwähnten Anlehens sei zum Kurse von 230 erworben worden; wie groß wäre die für die 5. Ziehung gegen Verlosungsverlust zu entrichtende Prämie (netto)?
163. Es ist der Wert einer Promesse auf das Anlehen in Nr. 122 für die 3. Ziehung zu ermitteln.
164. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein 17-Jähriger *a)* nach 17 Jahren noch lebt? *b)* vor Vollendung des 60. Lebensjahres stirbt? *c)* im 75. Lebensjahre stirbt? (Tafel AH^M.)
165. Es ist die wahrscheinliche Lebensdauer des 20-Jährigen, beziehungsweise des 40-Jährigen nach den verschiedenen Absterbeordnungen zu bestimmen.
166. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 2 Personen im Alter von 38 und 32 Jahren nach 15 Jahren noch mindestens eine Person lebt?
167. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 3 Personen des Alters x, y, z nach n Jahren *a)* noch eine Person lebt; *b)* 2 gestorben sind; *c)* höchstens eine Person gestorben ist?

Lebensversicherung.

168. Es ist die Richtigkeit des Wertes D_{35} der Rentner-Sterbetafel zu überprüfen.
169. Ein 65-Jähriger versichert eine lebenslänglich nachschüssig zahlbare Leibrente von 700 K. Wie groß ist *a)* die hiefür bei 8%igem Regiezuschlag zu entrichtende Einmalprämie? *b)* die Prämienreserve nach 7 Jahren?
170. Wie groß wäre der Wert der vorstehenden Leibrente, wenn derselbe mit Hilfe der wahrscheinlichen Lebensdauer berechnet würde?
171. Welche lebenslänglich nachschüssige Leibrente erhält ein 55-Jähriger für eine Einlage von 25 000 K bei $7\frac{1}{2}$%igem Regiezuschlag und wie groß ist die Prämienreserve nach 5 Jahren?
172. Wie groß ist *a)* für die Einlage in Nr. 171 die Rente, wenn dieselbe erst mit dem 65. Lebensjahre beginnt? *b)* die Prämienreserve nach 8 und nach 12 Jahren?
173. Ein 35-Jähriger hat für eine mit dem 60. Lebensjahre beginnende lebenslängliche Leibrente von jährlich 1500 K 25mal eine Prämie von 395·18 K zu entrichten. Wie groß ist *a)* der Regiezuschlag? *b)* die Prämienreserve nach 24 Jahren?
174. Wie groß wäre in Nr. 173 die reduzierte Rente, wenn die Prämienzahlung nach 15 Jahren eingestellt und bei der Umwandlung ein 10%iger Regiezuschlag angerechnet würde?

175. Um welchen Betrag müßte die auf S. 132 und 133 berechnete Prämie alljährlich steigen, damit die versicherte Rente 1500 *K* beträgt?
176. Wie groß ist die Einmalprämie in Nr. 169, wenn die Rente *a)* vierteljährlich im nachhinein, *b)* monatlich im vornhinein zahlbar ist? (Regiezuschlag 10%.)
177. Es ist zu Aufgabe 176 *a)* und *b)* die Prämienreserve nach 10 Jahren zu bestimmen.
178. Wie groß ist die Rente in Nr. 171, wenn dieselbe halbjährig *a)* im vorhinein, *b)* im nachhinein gezahlt werden soll?
179. Es ist zu Aufgabe 178 *a)* und *b)* die Prämienreserve nach 6 Jahren zu bestimmen.
180. Welche Jahresprämie hat ein 32-Jähriger für eine Erlebensversicherung pro 5000 *K* auf das 62. Lebensjahr *a)* während der ganzen Versicherungsdauer, *b)* durch 15 Jahre bei 12%igem Regiezuschlag zu entrichten?
181. Wie groß ist zu Aufgabe 180 *a)* und *b)* die Prämienreserve nach 14 Jahren?
182. Ein Versicherter hat für eine Erlebensversicherung mit 20jähriger Dauer eine Jahresprämie von $3\frac{1}{2}\%$ der Versicherungssumme bezahlt und den Fälligkeitstermin erlebt. Mit wieviel Prozent haben sich die Prämien verzinst?
183. Welche Prämie wäre in Aufgabe 180 *a)* vierteljährig zu entrichten, wenn der Zuschlag für die unterjährige Zahlung 4% beträgt?
184. Ist es bei einem speziellen Zuschlag von $3\frac{1}{2}\%$ für den Versicherungsnehmer vorteilhafter, die Prämie ganz- oder vierteljährig zu bezahlen, wenn er in der Sparkasse *a)* eine 3%ige, *b)* eine $3\frac{1}{2}\%$ige, *c)* 4%ige Verzinsung erzielt?

Die folgenden Aufgaben bis einschließlich Nr. 199 sind, wenn nichts anderes vermerkt ist, nach der österreichisch-ungarischen Sterblichkeitstafel zu berechnen.

185. Ein 38-Jähriger will einen Betrag von 5000 *K* zum Abschlusse einer Todesfallversicherung verwenden. Wie groß wäre bei 15%igem Regiezuschlag *a)* die versicherte Summe, *b)* die Prämienreserve nach 14 Jahren?
186. Wie groß ist die lebenslänglich zu zahlende Jahresprämie eines 40-Jährigen für eine Todesfallversicherung von 7000 *K* bei 15%igem Zuschlag? (auch zu berechnen nach 17 engl. Ges. $3\frac{1}{2}$ und 4% und nach MWI).
187. Welche Rückkaufssumme bekäme in Nr. 186 der Versicherte nach 15 Jahren, wenn eine gleichbleibende Quote von 75% gewährt wird?
188. Welche Jahresprämie hat ein 35-Jähriger für eine Todesfallversicherung von 5000 *K* durch 25 Jahre bei einem 20%igen Regiezuschlag zu entrichten und auf welchen Betrag lautet die prämienfreie Reduktionspolizze nach 13 Jahren, wenn bei der Umwandlung ein Zuschlag von 10% in Anschlag kommt?

189. Wie groß ist der Regiezuschlag, wenn die lebenslängliche Prämie eines 26-Jährigen für eine Todesfallversicherung $1\frac{1}{5}\%$ der versicherten Summe beträgt?
190. Ein 50-Jähriger hat vor 16 Jahren gegen lebenslängliche Prämienzahlung eine Todesfallversicherung auf 10 000 *K* abgeschlossen und will nunmehr die weiteren Zahlungen einstellen. Wie lange bliebe er noch auf die volle Summe versichert, wenn bei der Umwandlung ein 12%iger Zuschlag angerechnet wird?
191. Welche Monatsprämie hat ein 37-Jähriger für eine durch 3 Jahre aufgeschobene Todesfallversicherung von 2000 *K* bei einem Regiezuschlag von 25 + 6% lebenslänglich zu entrichten und wie groß ist die Prämienreserve nach 2 und 9 Jahren?
192. Ein 27jähriger Beamter hat erst nach 10 Jahren Anspruch auf Invaliditäts- und Witwenrente und schließt deshalb eine auf 10 Jahre abgekürzte Todesfallversicherung per 10 000 *K* ab. Wie groß ist *a)* die Jahresprämie bei 22%igem Zuschlag, *b)* die Prämienreserve nach 5 Jahren?
193. Ein 30-Jähriger will gegen Einmalprämie eine gemischte Versicherung mit 30jähriger Dauer im Betrage von 8000 *K* abschließen. Wie groß ist *a)* bei 10%igem Regiezuschlag die Prämie, *b)* die Prämienreserve nach 11 Jahren?
194. Welche Prämie hat ein 45-Jähriger für eine gemischte Versicherung auf das 65. Lebensjahr pro 5000 *K* *a)* während der ganzen Versicherungsdauer, *b)* durch 15 Jahre bei 20%igem Zuschlag zu bezahlen? (auch nach 17 engl. Ges. $3\frac{1}{2}$ und 4% und MWI).
195. Wie groß ist in Aufgabe 194 *a)* die Rückkaufssumme nach 13 Jahren, wenn dieselbe nach einer mit 60% beginnenden Skala zu berechnen ist und auf welchen Betrag lautet nach 15 Jahren die prämienfreie Reduktionspolizze?
196. Ein 38jähriger Vater will durch Abschluß einer à terme fixe Versicherung seinem 4jährigen Sohne bei Antritt seiner Militärdienstpflicht (mit vollendetem 21. Lebensjahre) eine gewisse Summe sichern und entrichtet zu diesem Zwecke eine halbjährige Prämie von 50 *K*. Wie groß ist das versicherte Kapital bei 15 + 2% Zuschlag?
197. Unmittelbar vor Entrichtung der 10. Prämie aus Nr. 196 trete der Tod des Vaters ein. Wäre in diesem Falle Versicherung oder Sparkasse (mit $3\frac{1}{2}\%$iger Verzinsung) vorteilhafter gewesen?
198. Mit wieviel Prozent verzinsen sich die Prämien im Falle 197?
199. Es ist die Prämienreserve nach 14 Jahren zur Aufgabe 196 zu bestimmen, wenn der Vater *a)* noch lebt, *b)* bereits gestorben ist.

200. Ein 36-Jähriger versichert eine durch 25 Jahre aufgeschobene Leibrente von jährlich 2400 K mit Prämienrückgewähr. Wie groß ist *a)* bei $9\frac{1}{2}\%$igem Regiezuschlag die Einmalprämie, *b)* die Prämienreserve nach 16 Jahren? (Rentnertafel.)

201. Ein 28-Jähriger leistet eine einmalige Einlage von 2500 K für eine Erlebensversicherung auf das 50. Lebensjahr mit Prämienrückgewähr. Wie groß ist *a)* bei 10%igem Zuschlag die versicherte Summe, *b)* die Prämienreserve nach 12 Jahren? (Rentnertafel.)

202. Wie groß ist *a)* die vorschüssige, *b)* die nachschüssige Verbindungsrente eines 46jährigen Mannes mit einer 36jährigen Frau?

203. Ein 37jähriger Mann versichert seiner 39jährigen Frau eine Witwenpension von jährlich 1400 K. Wie groß ist die Einmalprämie bei 10%igem Zuschlag?

204. Zu der vorstehenden Aufgabe ist die Prämienreserve nach 10 Jahren unter der Voraussetzung zu ermitteln, daß *a)* noch beide Personen leben, *b)* der Mann bereits gestorben ist.

205. Ein 35jähriger Mann will für seine um 4 Jahre jüngere Frau behufs Versicherung einer Witwenpension eine jährliche Prämie von 400 K bezahlen. Wie groß ist *a)* die versicherte Rente bei 12%igem Regiezuschlag? *b)* die Prämienreserve nach 7 Jahren, wenn noch beide Personen leben?

206. Ein Vater hat seinen beiden Töchtern im Alter von 28 und 25 Jahren ein Kapital von 40 000 K mit der Bestimmung hinterlassen, daß dasselbe einer Versicherungsgesellschaft übergeben werde, wofür diese, so lange beide Mädchen leben, denselben eine Rente von bestimmter Höhe, nach dem Tode des zuerst sterbenden aber an das überlebende nur im halben Ausmaße zu bezahlen hat. Wie groß ist die Rente bei 10%igem Zuschlag?

207. Es ist zu Nr. 206 die Rente zu bestimmen, wenn dieselbe im gleichen Betrage bis zum Tode der zuletzt sterbenden Person gezahlt wird?

208. Es ist zu den Aufgaben 206 und 207 die Prämienreserve nach 15 Jahren zu berechnen, wenn *a)* noch beide Personen leben, *b)* eine Person bereits gestorben ist.

209. Welche Einmalprämie ist für eine gegenseitige Überlebensversicherung zweier Personen vom Alter 37 und 33 bei 10%igem Regiezuschlag zu entrichten und wie groß ist die Prämienreserve nach 9 Jahren? (3 Eventualitäten.)

210. Ein 37jähriger Mann versichert seiner 32jährigen Frau für den Fall seines Todes ein Kapital von 15 000 K. Wie groß ist die Jahresprämie bei 15%igem Zuschlag?

211. In welcher Weise ändert sich die Prämie in Nr. 210, wenn die Frau ebenfalls 35 Jahre alt ist?



Hilfs-Tabellen

zu dem

Lehrbuch der Politischen Arithmetik

von

Wilhelm Ludwig.

---

4. Auflage.

Inhalt.

Zinseszinsen-Tabellen.

Sterblichkeits-Tafeln.

Inhalt.

Zinseszinsen-Tabellen.

Sterblichkeits-Tafeln.

Zinseszinsen-Tabellen.

Zeichen-Erklärung.

p = Zinsfuß
$1 + \frac{p}{100} = r$ = Aufzinsungsfaktor
} bei dekursiver Verzinsung

Tabelle I dekursiv enthält die Werte: r^n
Tabelle II " " " " : $\frac{1}{r^n} (= v^n)$
Tabelle III " " " " : $r + r^2 + \ldots + r^n$
Tabelle IV " " " " : $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}$
} für $n = 1$ bis 50 und für $p = 1^3/_4$, 2, 3, $3^1/_2$, $3^3/_4$, 4, $4^1/_4$ und $4^1/_2$.

π = Zinsfuß
$\frac{100}{100-\pi} = \varrho$ = Aufzinsungsfaktor
} bei antizipativer Verzinsung

Tabelle I antizipativ enthält die Werte: ϱ^n
Tabelle II " " " " : $\frac{1}{\varrho^n}$
Tabelle III " " " " : $\varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^n$
Tabelle IV " " " " : $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \ldots + \frac{1}{\varrho^n}$
} für $n = 1$ bis 50 und für $\pi = 2$, $2^1/_4$, $3^1/_2$ und 4.

Tabelle I dekursiv.

Termin	$1\frac{3}{4}\%$	2%	3%	$3\frac{1}{2}\%$
1	1·0175	1·02	1·03	1·035
2	1·0353 0625	1·0404	1·0609	1·0712 25
3	1·0534 2411	1·0612 08	1·0927 27	1·1087 1788
4	1·0718 5903	1·0824 3216	1·1255 0881	1·1475 2300
5	1·0906 1656	1·1040 8080	1·1592 7407	1·1876 8631
6	1·1097 0235	1·1261 6242	1·1940 5230	1·2292 5533
7	1·1291 2215	1·1486 8567	1·2298 7387	1·2722 7926
8	1·1488 8178	1·1716 5938	1·2667 7008	1·3168 0904
9	1·1689 8721	1·1950 9257	1·3047 7318	1·3628 9735
10	1·1894 4449	1·2189 9442	1·3439 1638	1·4105 9876
11	1·2102 5977	1·2433 7431	1·3842 3387	1·4599 6972
12	1·2314 3931	1·2682 4179	1·4257 6089	1·5110 6866
13	1·2529 8950	1·2936 0663	1·4685 3371	1·5639 5606
14	1·2749 1682	1·3194 7876	1·5125 8972	1·6186 9452
15	1·2972 2786	1·3458 6834	1·5579 6742	1·6753 4883
16	1·3199 2935	1·3727 8571	1·6047 0644	1·7339 8604
17	1·3430 2811	1·4002 4142	1·6528 4763	1·7946 7555
18	1·3665 3111	1·4282 4625	1·7024 3306	1·8574 8920
19	1·3904 4540	1·4568 1117	1·7535 0605	1·9225 0132
20	1·4147 7820	1·4859 4740	1·8061 1123	1·9897 8886
21	1·4395 3681	1·5156 6634	1·8602 9457	2·0594 3147
22	1·4647 2871	1·5459 7967	1·9161 0341	2·1315 1158
23	1·4903 6146	1·5768 9926	1·9735 8651	2·2061 1448
24	1·5164 4279	1·6084 3725	2·0327 9411	2·2833 2849
25	1·5429 8054	1·6406 0599	2·0937 7793	2·3632 4498
26	1·5699 8269	1·6734 1811	2·1565 9127	2·4459 5856
27	1·5974 5739	1·7068 8648	2·2212 8901	2·5315 6711
28	1·6254 1290	1·7410 2421	2·2879 2768	2·6201 7196
29	1·6538 5762	1·7758 4469	2·3565 6551	2·7118 7798
30	1·6828 0013	1·8113 6158	2·4272 6247	2·8067 9370
31	1·7122 4913	1·8475 8882	2·5000 8035	2·9050 3148
32	1·7422 1349	1·8845 4059	2·5750 8276	3·0067 0759
33	1·7727 0223	1·9222 3140	2·6523 3524	3·1119 4235
34	1·8037 2452	1·9606 7603	2·7319 0530	3·2208 6033
35	1·8352 8970	1·9998 8955	2·8138 6245	3·3335 9045
36	1·8674 0727	2·0398 8734	2·8982 7833	3·4502 6611
37	1·9000 8689	2·0806 8509	2·9852 2668	3·5710 2543
38	1·9333 3841	2·1222 9879	3·0747 8348	3·6960 1132
39	1·9671 7184	2·1647 4477	3·1670 2698	3·8253 7171
40	2·0015 9734	2·2080 3966	3·2620 3779	3·9592 5972
41	2·0366 2530	2·2522 0046	3·3598 9893	4·0978 3381
42	2·0722 6624	2·2972 4447	3·4606 9589	4·2412 5799
43	2·1085 3090	2·3431 8936	3·5645 1677	4·3897 0202
44	2·1454 3019	2·3900 5314	3·6714 5227	4·5433 4160
45	2·1829 7522	2·4378 5421	3·7815 9584	4 7023 5855
46	2·2211 7728	2·4866 1129	3·8950 4372	4·8669 4110
47	2·2600 4789	2·5363 4352	4·0118 9503	5·0372 8404
48	2·2995 9872	2·5870 7039	4·1322 5188	5·2135 8898
49	2·3398 4170	2·6388 1179	4·2562 1944	5·3960 6459
50	2·3807 8893	2·6915 8803	4·3839 0602	5·5849 2686

Tabelle I dekursiv.

Termin	$3\frac{3}{4}\%$	4%	$4\frac{1}{4}\%$	$4\frac{1}{2}\%$
1	1·0375	1·04	1·0425	1·045
2	1·0764 0625	1·0816	1·0868 0625	1·0920 25
3	1·1167 7148	1·1248 64	1·1329 9552	1·1411 6613
4	1·1586 5042	1·1698 5856	1·1811 4783	1·1925 1860
5	1·2020 9981	1·2166 5290	1·2313 4661	1·2461 8194
6	1·2471 7855	1·2653 1902	1·2836 7884	1·3022 6012
7	1·2939 4774	1·3159 3178	1·3382 3519	1·3608 6183
8	1·3424 7078	1·3685 6905	1·3951 1018	1·4221 0061
9	1·3928 1344	1·4233 1181	1·4544 0237	1·4860 9514
10	1·4450 4394	1·4802 4428	1·5162 1447	1·5529 6942
11	1·4992 3309	1·5394 5406	1·5806 5358	1·6228 5305
12	1·5554 5433	1·6010 3222	1·6478 3136	1·6958 8143
13	1·6137 8387	1·6650 7351	1·7178 6419	1·7721 9610
14	1·6743 0076	1·7316 7645	1·7908 7342	1·8519 4492
15	1·7370 8704	1·8009 4351	1·8669 8554	1·9352 8244
16	1·8022 2781	1·8729 8125	1·9463 3243	2·0223 7015
17	1·8698 1135	1·9479 0050	2·0290 5156	2·1133 7681
18	1·9399 2927	2·0258 1652	2·1152 8625	2·2084 7877
19	2·0126 7662	2·1068 4918	2·2051 8591	2·3078 6031
20	2·0881 5200	2·1911 2314	2·2989 0631	2·4117 1402
21	2·1664 5770	2·2787 6807	2·3966 0983	2·5202 4116
22	2·2476 9986	2·3699 1879	2·4984 6575	2·6336 5201
23	2·3319 8860	2·4647 1554	2·6046 5054	2·7521 6635
24	2·4194 3818	2·5633 0416	2·7153 4819	2·8760 1383
25	2·5101 6711	2·6658 3633	2·8307 5049	3·0054 3446
26	2·6042 9838	2·7724 6978	2·9510 5739	3·1406 7901
27	2·7019 5956	2·8833 6858	3·0764 7732	3·2820 0956
28	2·8032 8305	2·9987 0332	3·2072 2761	3·4296 9999
29	2·9084 0616	3·1186 5145	3·3435 3478	3·5840 3649
30	3·0174 7139	3·2433 9751	3·4856 3501	3·7453 1813
31	3·1306 2657	3·3731 3341	3·6337 7450	3·9138 5745
32	3·2480 2507	3·5080 5875	3·7882 0992	4·0899 8104
33	3·3698 2601	3·6483 8110	3·9492 0884	4·2740 3018
34	3·4961 9448	3·7943 1634	4·1170 5021	4·4663 6154
35	3·6273 0178	3·9460 8899	4·2920 2485	4·6673 4781
36	3·7633 2559	4·1039 3255	4·4744 3590	4·8773 7846
37	3·9044 5030	4·2680 8986	4·6645 9943	5·0968 6049
38	4·0508 6719	4·4388 1345	4 8628 4491	5·3262 1921
39	4·2027 7471	4·6163 6599	5·0695 1581	5·5658 9908
40	4·3603 7876	4·8010 2063	5·2849 7024	5·8163 6454
41	4·5238 9296	4·9930 6145	5·5095 8147	6·0781 0094
42	4·6935 3895	5·1927 8391	5·7437 3868	6·3516 1548
43	4·8695 4666	5·4004 9527	5·9878 4758	6·6374 3818
44	5·0521 5466	5·6165 1508	6·2423 3110	6·9361 2290
45	5·2416 1046	5·8411 7568	6·5076 3017	7·2482 4843
46	5·4381 7085	6·0748 2271	6·7842 0445	7·5744 1961
47	5·6421 0226	6·3178 1562	7·0725 3314	7·9152 6849
48	5·8536 8109	6·5705 2824	7·3731 1580	8·2714 5557
49	6·0731 9413	6·8333 4937	7·6864 7322	8·6436 7107
50	6·3009 3891	7·1066 8335	8·0131 4834	9·0326 3627

Tabelle II dekursiv.

Termin	1³/₄ %	2 %	3 %	3¹/₂ %
1	0·9828 0098	0·9803 9216	0·9708 7379	0·9661 8357
2	0·9658 9777	0·9611 6878	0·9425 9591	0·9335 1070
3	0·9492 8528	0·9423 2233	0·9151 4166	0·9019 4271
4	0·9329 5851	0·9238 4543	0·8884 8705	0·8714 4223
5	0·9169 1254	0·9057 3081	0·8626 0878	0·8419 7317
6	0·9011 4254	0·8879 713[illegible]	0·8374 8426	0·8135 0064
7	0·8856 4378	0·8705 6018	0·8130 9151	0·7859 9096
8	0·8704 1157	0·8534 9037	0·7894 0923	0·7594 1156
9	0·8554 4135	0·8367 5527	0·7664 1673	0·7337 3097
10	0·8407 2860	0·8203 4830	0·7440 9391	0·7089 1881
11	0·8262 6889	0·8042 6304	0·7224 2128	0·6849 4571
12	0·8120 5788	0·7884 9318	0·7013 7988	0·6617 8330
13	0·7980 9128	0·7730 3253	0·6809 5134	0·6394 0415
14	0·7843 6490	0·7578 7502	0·6611 1781	0·6177 8179
15	0·7708 7459	0·7430 1473	0·6418 6195	0·5968 9062
16	0·7576 1631	0·7284 4581	0·6231 6694	0·5767 0591
17	0·7445 8605	0·7141 6256	0·6050 1645	0·5572 0378
18	0·7317 7990	0·7001 5937	0·5873 9461	0·5383 6114
19	0·7191 9401	0·6864 3076	0·5702 8603	0·5201 5569
20	0·7068 2458	0·6729 7133	0·5536 7575	0·5025 6588
21	0·6946 6789	0·6597 7582	0·5375 4928	0·4855 7090
22	0·6827 2028	0·6468 3904	0·5218 9250	0·4691 5063
23	0·6709 7817	0·6341 5592	0·5066 9175	0·4532 8563
24	0·6594 3800	0·6217 2149	0·4919 3374	0·4379 5713
25	0·6480 9632	0·6095 3087	0·4776 0557	0·4231 4699
26	0·6369 4970	0·5975 7928	0 4636 9473	0·4088 3767
27	0·6259 9479	0·5858 6204	0·4501 8906	0·3950 1224
28	0·6152 2829	0·5743 7455	0·4370 7675	0·3816 5434
29	0·6046 4697	0·5631 1231	0·4243 4636	0·3687 4815
30	0·5942 4764	0·5520 7089	0·4119 8676	0·3562 7841
31	0·5840 2716	0·5412 4597	0·3999 8715	0·3442 3035
32	0·5739 8247	0·5306 3330	0·3883 3703	0·3325 8971
33	0·5641 1053	0·5202 2873	0·3770 2625	0·3213 4271
34	0·5544 0839	0·5100 2817	0·3660 4490	0·3104 7605
35	0·5448 7311	0·5000 2761	0·3553 8340	0·2999 7686
36	0·5355 0183	0·4902 2315	0·3450 3243	0·2898 3272
37	0·5262 9172	0·4806 1093	0·3349 8294	0·2800 3161
38	0·5172 4002	0·4711 8719	0·3252 2615	0·2705 6194
39	0·5083 4400	0·4619 4822	0·3157 5355	0·2614 1250
40	0·4996 0098	0·4528 9042	0·3065 5684	0·2525 7247
41	0·4910 0834	0·4440 1021	0·2976 2800	0·2440 3137
42	0·4825 6348	0·4353 0413	0·2889 5922	0·2357 7910
43	0·4742 6386	0·4267 6875	0·2805 4294	0·2278 0590
44	0·4661 0699	0·4184 0074	0·2723 7178	0·2201 0231
45	0·4580 9040	0·4101 9680	0·2644 3862	0·2126 5924
46	0·4502 1170	0·4021 5373	0·2567 3653	0·2054 6787
47	0·4424 6850	0·3942 6836	0·2492 5876	0·1985 1968
48	0·4348 5848	0·3865 3761	0·2419 9880	0·1918 0645
49	0·4273 7934	0·3789 5844	0·2349 5029	0·1853 2024
50	0·4200 2883	0·3715 2788	0·2281 0708	0·1790 5337

Tabelle II dekursiv.

Termin	3³/₄ %	4 %	4¹/₄ %	4¹/₂ %
1	0·9638 5542	0·9615 3846	0·9592 3261	0·9569 3780
2	0·9290 1727	0·9245 5621	0·9201 2721	0·9157 2995
3	0·8954 3831	0·8889 9636	0·8826 1603	0 8762 9660
4	0·8630 7310	0·8548 0419	0·8466 3408	0·8385 6134
5	0·8318 7768	0·8219 2711	0·8121 1902	0·8024 5105
6	0·8018 0981	0·7903 1453	0·7790 1105	0·7678 9574
7	0·7728 2874	0·7599 1781	0 7472 5281	0·7348 2846
8	0·7448 9517	0·7306 9021	0·7167 8926	0·7031 8513
9	0·7179 7125	0·7025 8674	0·6875 6764	0·6729 0443
10	0·6920 2048	0·6755 6417	0·6595 3730	0·6439 2768
11	0·6670 0769	0·6495 8093	0·6326 4969	0·6161 9874
12	0·6428 9898	0·6245 9705	0·6068 5822	0·5896 6386
13	0·6196 6167	0·6005 7409	0·5821 1819	0·5642 7164
14	0·5972 6426	0·5774 7508	0·5583 8676	0·5399 7286
15	0·5756 7639	0·5552 6450	0·5356 2279	0·5167 2044
16	0 5548 6881	0·5339 0818	0·5137 8685	0·4944 6932
17	0·5348 1331	0·5133 7325	0·4928 4110	0·4731 7639
18	0·5154 8271	0·4936 2812	0·4727 4926	0·4528 0037
19	0·4968 5080	0·4746 4242	0·4534 7650	0·4333 0179
20	0·4788 9234	0·4563 8695	0·4349 8945	0·4146 4286
21	0·4615 8298	0·4388 3360	0·4172 5607	0·3967 8743
22	0·4448 9926	0·4219 5539	0·4002 4563	0·3797 0089
23	0·4288 1856	0·4057 2633	0·3839 2866	0·3633 5013
24	0·4133 1910	0·3901 2147	0·3682 7689	0·3477 0347
25	0·3983 7985	0·3751 1680	0·3532 6321	0·3327 3060
26	0·3839 8058	0·3606 8923	0·3388 6159	0·3184 0248
27	0·3701 0176	0·3468 1657	0·3250 4709	0·3046 9137
28	0·3567 2459	0·3334 7747	0·3117 9577	0·2915 7069
29	0·3438 3093	0·3206 5141	0·2990 8467	0·2790 1502
30	0·3314 0331	0·3083 1867	0·2868 9177	0·2670 0002
31	0·3194 2487	0·2964 6026	0·2751 9594	0·2555 0241
32	0·3078 7940	0·2850 5794	0·2639 7692	0·2444 9991
33	0·2967 5123	0·2740 9417	0·2532 1527	0·2339 7121
34	0·2860 2528	0·2635 5209	0·2428 9235	0·2238 9589
35	0·2756 8702	0·2534 1547	0·2329 9026	0·2142 5444
36	0·2657 2242	0·2436 6872	0·2234 9186	0·2050 2817
37	0·2561 1800	0·2342 9685	0·2143 8068	0·1961 9921
38	0·2468 6672	0·2252 8543	0·2056 4094	0·1877 5044
39	0·2379 3805	0·2166 2061	0·1972 5750	0·1796 6549
40	0·2293 3788	0·2082 8904	0·1892 1582	0·1719 2870
41	0·2210 4855	0·2002 7793	0·1815 0199	0·1645 2507
42	0·2130 5885	0·1925 7493	0·1741 0263	0·1574 4026
43	0·2053 5793	0·1851 6820	0·1670 0492	0·1506 6054
44	0·1979 3535	0·1780 4635	0·1601 9657	0·1441 7276
45	0·1907 8106	0·1711 9841	0·1536 6577	0·1379 6437
46	0·1838 8536	0·1646 1386	0·1474 0122	0·1320 2332
47	0·1772 3890	0·1582 8256	0·1413 9206	0·1263 3810
48	0·1708 3268	0·1521 9476	0·1356 2787	0·1208 9771
49	0·1646 5800	0·1463 4112	0·1300 9868	0·1156 9158
50	0·1587 0651	0·1407 1262	0·1247 9489	0·1107 0965

Tabelle III dekursiv.

Termin	$1^3/_4$%	2%	3%	$3^1/_2$%
1	1·0175	1·02	1·03	1·035
2	2·0528 0625	2·0604	2·0909	2·1062 25
3	3·1062 3036	3·1216 08	3·1836 27	3·2149 4288
4	4·1780 8939	4·2040 4016	4·3091 3581	4·3624 6588
5	5·2687 0596	5·3081 2096	5·4684 0988	5·5501 5218
6	6·3784 0831	6·4342 8338	6·6624 6218	6·7794 0751
7	7·5075 3045	7·5829 6905	7·8923 3605	8·0516 8677
8	8·6564 1224	8·7546 2843	9·1591 0613	9·3684 9581
9	9·8253 9945	9·9497 2100	10·4638 7931	10·7313 9316
10	11·0148 4394	11·1687 1542	11·8077 9569	12·1419 9192
11	12·2251 0371	12·4120 8973	13·1920 2956	13·6019 6164
12	13·4565 4303	13·6803 3152	14·6177 9045	15·1130 3030
13	14·7095 3253	14·9739 3815	16·0863 2416	16·6769 8636
14	15·9844 4935	16·2934 1692	17·5989 1389	18·2956 8088
15	17·2816 7721	17·6392 8525	19·1568 8130	19·9710 2971
16	18·6016 0656	19·0120 7096	20·7615 8774	21·7050 1575
17	19·9446 3468	20·4123 1238	22·4144 3537	23·4996 9130
18	21·3111 6578	21·8405 5863	24·1168 6844	25·3571 8050
19	22·7016 1119	23·2973 6980	25·8703 7449	27·2796 8181
20	24·1163 8938	24·7833 1719	27·6764 8572	29·2694 7068
21	25·5559 2620	26·2989 8354	29·5367 8030	31·3289 0215
22	27·0206 5490	27·8449 6321	31·4528 8370	33·4604 1373
23	28·5110 1637	29·4218 6247	33·4264 7022	35·6665 2821
24	30·0274 5915	31·0302 9972	35·4592 6432	37·9498 5669
25	31·5704 3969	32·6709 0572	37·5530 4225	40·3131 0168
26	33·1404 2238	34·3443 2383	39·7096 3352	42·7590 6024
27	34·7378 7977	36·0512 1031	41·9309 2252	45·2906 2734
28	36·3632 9267	37·7922 3451	44·2188 5020	47·9107 9930
29	38·0171 5029	39·5680 7921	46·5754 1571	50·6226 7728
30	39·6999 5042	41·3794 4079	49·0026 7818	53·4294 7098
31	41·4121 9955	43·2270 2961	51·5027 5852	56·3345 0247
32	43·1544 1305	45·1115 7020	54·0778 4128	59·3412 1005
33	44·9271 1527	47·0338 0160	56·7301 7652	62·4531 5240
34	46·7308 3979	48·9944 7763	59·4620 8181	65·6740 1274
35	48·5661 2949	50·9943 6719	62·2759 4427	69·0076 0318
36	50·4335 3675	53·0342 5453	65·1742 2259	72·4578 6930
37	52·3336 2365	55·1149 3962	68·1594 4927	76·0288 9472
38	54·2669 6206	57·2372 3841	71·2342 3275	79·7249 0604
39	56·2341 3390	59·4019 8318	74·4012 5973	83·5502 7775
40	58·2357 3124	61·6100 2284	77·6632 9753	87·5095 3747
41	60·2723 5654	63·8622 2330	81·0231 9645	91·6073 7128
42	62·3446 2278	66·1594 6777	84·4838 9234	95·8486 2928
43	64·4531 5367	68·5026 5712	88·0484 0911	100·2383 3130
44	66·5985 8386	70·8927 1027	91·7198 6139	104·7816 7290
45	68·7815 5908	73·3305 6447	95·5014 5723	109·4840 3145
46	71·0027 3637	75·8171 7576	99·3965 0095	114·3509 7255
47	73·2627 8425	78·3535 1927	103·4083 9598	119·3882 5659
48	75·5623 8298	80·9405 8966	107·5406 4785	124·6018 4557
49	77·9022 2468	83·5794 0145	111·7968 6729	129·9979 1016
50	80·2830 1361	86·2709 8948	116·1807 7331	135·5828 3702

Tabelle III dekursiv.

Termin	$3^3/_4$%	4%	$4^1/_4$%	$4^1/_2$%
1	1·0375	1·04	1·0425	1·045
2	2·1139 0625	2·1216	2·1293 0625	2·1370 25
3	3·2306 7773	3·2464 64	3·2623 0177	3·2781 9113
4	4·3893 2815	4·4163 2256	4·4434 4959	4·4707 0973
5	5·5914 2796	5·6329 7546	5·6747 9620	5·7168 9166
6	6·8386 0650	6·8982 9448	6·9584 7504	7·0191 5179
7	8·1325 5425	8·2142 2626	8·2967 1023	8·3800 1362
8	9·4750 2503	9·5827 9531	9·6918 2041	9·8021 1423
9	10·8678 3847	11·0061 0712	11·1462 2278	11·2882 0937
10	12·3128 8241	12·4863 5141	12·6624 3725	12·8411 7879
11	13·8121 1550	14·0258 0546	14·2430 9083	14·4640 3184
12	15·3675 6983	15·6268 3768	15·8909 2219	16·1599 1327
13	16·9813 5370	17·2919 1119	17·6087 8638	17·9321 0937
14	18·6556 5447	19·0235 8764	19·3996 5980	19·7840 5429
15	20·3927 4151	20·8245 3114	21·2666 4534	21·7193 3673
16	22·1949 6932	22·6975 1239	23·2129 7777	23·7417 0689
17	24·0647 8067	24·6454 1288	25·2420 2933	25·8550 8370
18	26·0047 0994	26·6712 2940	27·3573 1557	28·0635 6246
19	28·0173 8656	28·7780 7858	29·5625 0149	30·3714 2277
20	30·1055 3856	30·9692 0172	31·8614 0780	32·7831 3680
21	32·2719 9626	33·2479 6979	34·2580 1763	35·3033 7795
22	34·5196 9612	35·6178 8858	36·7564 8338	37·9370 2996
23	36·8516 8472	38·0826 0412	39·3611 3392	40·6891 9631
24	39·2711 2290	40·6459 0829	42·0764 8211	43·5652 1015
25	41·7812 9001	43·3117 4462	44·9072 3260	46·5706 4460
26	44·3855 8838	46·0842 1440	47·8582 8999	49·7113 2361
27	47·0875 4794	48·9675 8298	50·9347 6732	52·9933 3317
28	49·8908 3099	51·9662 8630	54·1419 9493	56·4230 3316
29	52·7992 3715	55·0849 3775	57·4855 2971	60·0070 6966
30	55·8167 0855	58·3283 3526	60·9711 6472	63·7523 8779
31	58·9473 3512	61·7014 6867	64·6049 3922	67·6662 4524
32	62·1953 6019	65·2095 2742	68·3931 4914	71·7562 2628
33	65·5651 8619	68·8579 0851	72·3423 5798	76·0302 5646
34	69·0613 8067	72·6522 2486	76·4594 0819	80·4966 1800
35	72·6886 8245	76·5983 1385	80·7514 3304	85·1639 6581
36	76·4520 0804	80·7022 4640	85·2258 6895	90·0413 4427
37	80·3564 5834	84·9703 3626	89·8904 6838	95·1382 0476
38	84·4073 2553	89·4091 4971	94·7533 1328	100·4644 2398
39	88·6101 0024	94·0255 1570	99·8228 2910	106·0303 2306
40	92·9704 7900	98·8265 3633	105·1077 9933	111·8466 8760
41	97·4943 7196	103·8195 9778	110·6173 8080	117·9247 8854
42	102·1879 1091	109·0123 8169	116·3611 1949	124·2764 0402
43	107·0574 5757	114·4128 7696	122·3489 6707	130·9138 4220
44	112·1096 1223	120·0293 9204	128·5912 9817	137·8499 6510
45	117·3512 2269	125·8705 6772	135·0989 2834	145·0982 1353
46	122·7893 9354	131·9453 9043	141·8831 3279	152·6726 3314
47	128·4314 9579	138·2632 0604	148·9556 6594	160·5879 0163
48	134·2851 7689	144·8337 3429	156·3287 8174	168·8593 5720
49	140·3583 7102	151·6670 8366	164·0152 5496	177·5030 2828
50	146·6593 0993	158·7737 6700	172·0284 0330	186·5356 6455

Tabelle IV dekursiv.

Termin	$1^3/_4$%	2%	3%	$3^1/_2$%
1	0·9828 0098	0·9803 9216	0·9708 7379	0·9661 8357
2	1·9486 9875	1·9415 6094	1·9134 6970	1·8996 9428
3	2·8979 8403	2·8838 8327	2·8286 1135	2·8016 3698
4	3·8309 4254	3·8077 2870	3·7170 9840	3·6730 7921
5	4·7478 5508	4·7134 5951	4·5797 0719	4·5150 5238
6	5·6489 9762	5·6014 3089	5·4171 9144	5·3285 5302
7	6·5346 4139	6·4719 9107	6·2302 8296	6·1145 4398
8	7·4050 5297	7·3254 8144	7·0196 9219	6·8739 5554
9	8·2604 9432	8·1622 3671	7·7861 0892	7·6076 8651
10	9·1012 2291	8·9825 8501	8·5302 0284	8·3166 0532
11	9·9274 9181	9·7868 4805	9·2526 2411	9·0015 5104
12	10·7395 4969	10·5753 4122	9·9540 0399	9·6633 3433
13	11·5376 4097	11·3483 7375	10·6349 5533	10·3027 3849
14	12·3220 0587	12·1062 4877	11·2960 7314	10·9205 2028
15	13·0928 8046	12·8492 6350	11·9379 3509	11·5174 1090
16	13·8504 9677	13·5777 0931	12·5611 0203	12·0941 1681
17	14·5950 8282	14·2918 7188	13·1661 1847	12·6513 2059
18	15·3268 6272	14·9920 3125	13·7535 1308	13·1896 8173
19	16·0460 5673	15·6784 6201	14·3237 9911	13·7098 3742
20	16·7528 8130	16·3514 3334	14·8774 7486	14·2124 0330
21	17·4475 4919	17·0112 0916	15·4150 2414	14·6979 7420
22	18·1302 6948	17·6580 4820	15·9369 1664	15·1671 2484
23	18·8012 4764	18·2922 0412	16·4436 0839	15·6204 1047
24	19·4606 8565	18·9139 2560	16·9355 4212	16·0583 6760
25	20·1087 8196	19·5234 5647	17·4131 4769	16·4815 1459
26	20·7457 3166	20·1210 3576	17·8768 4242	16·8903 5226
27	21·3717 2644	20·7068 9780	18·3270 3147	17·2853 6451
28	21·9869 5474	21·2812 7236	18·7641 0823	17·6670 1885
29	22·5916 0171	21·8443 8466	19·1884 5459	18·0357 6700
30	23·1858 4934	22·3964 5555	19·6004 4135	18·3920 4541
31	23·7698 7650	22·9377 0152	20·0004 2849	18·7362 7576
32	24·3438 5897	23·4683 3482	20·3887 6553	19·0688 6547
33	24·9079 6951	23·9885 6355	20·7657 9178	19·3902 0818
34	25·4623 7789	24·4985 9172	21·1318 3668	19·7006 8423
35	26·0072 5100	24·9986 1933	21·4872 2007	20·0006 6110
36	26·5427 5283	25·4888 4248	21·8322 5250	20·2904 9381
37	27·0690 4455	25·9694 5341	22·1672 3544	20·5705 2542
38	27·5862 8457	26·4406 4060	22·4924 6159	20·8410 8736
39	28·0946 2857	26·9025 8883	22·8082 1513	21·1024 9987
40	28·5942 2955	27·3554 7924	23·1147 7197	21·3550 7234
41	29·0852 3789	27·7994 8945	23·4123 9997	21·5991 0371
42	29·5678 0136	28·2347 9358	23·7013 5920	21·8348 8281
43	30·0420 6522	28·6615 6233	23·9819 0213	22·0626 8870
44	30·5081 7221	29·0799 6307	24·2542 7392	22·2827 9102
45	30·9662 6261	29·4901 5987	24·5187 1254	22·4954 5026
46	31·4164 7431	29·8923 1360	24·7754 4907	22·7009 1813
47	31·8589 4281	30·2865 8196	25·0247 0783	22·8994 3780
48	32·2938 0129	30·6731 1957	25·2667 0664	23·0912 4425
49	32·7211 8063	31·0520 7801	25·5016 5693	23·2765 6450
50	33·1412 0946	31·4236 0589	25·7297 6401	23·4556 1787

Tabelle IV dekursiv.

Termin	$3^3/_4$%	4%	$4^1/_4$%	$4^1/_2$%
1	0·9638 5542	0·9615 3846	0·9592 3261	0·9569 3780
2	1·8928 7270	1·8860 9467	1·8793 5982	1·8726 6775
3	2·7883 1103	2·7750 9103	2·7619 7585	2·7489 6435
4	3·6513 8413	3·6298 9522	3·6086 0993	3·5875 2570
5	4·4832 6181	4·4518 2233	4·4207 2895	4·3899 7674
6	5·2850 7162	5·2421 3686	5·1997 4000	5·1578 7248
7	6·0579 0036	6·0020 5467	5·9469 9280	5·8927 0094
8	6·8027 9553	6·7327 4487	6·6637 8206	6·5958 8607
9	7·5207 6677	7·4353 3161	7·3513 4970	7·2687 9050
10	8·2127 8725	8·1108 9578	8·0108 8700	7·9127 1818
11	8·8797 9494	8·7604 7671	8·6435 3669	8·5289 1692
12	9·5226 9392	9·3850 7376	9·2503 9491	9·1185 8078
13	10·1423 5558	9·9856 4785	9·8325 1310	9·6828 5242
14	10·7396 1984	10·5631 2293	10·3908 9986	10·2228 2528
15	11·3152 9623	11·1183 8743	10·9265 2265	10·7395 4573
16	11·8701 6504	11·6522 9561	11·4403 0949	11·2340 1505
17	12·4049 7835	12·1656 6885	11·9331 5059	11·7071 9143
18	12·9204 6106	12·6592 9697	12·4058 9985	12·1599 9180
19	13·4173 1187	13·1339 3940	12·8593 7636	12·5932 9359
20	13·8962 0121	13·5903 2634	13·2943 6581	13·0079 3645
21	14·3577 8719	14·0291 5995	13·7116 2188	13·4047 2388
22	14·8026 8645	14·4511 1533	14·1118 6751	13·7844 2476
23	15·2315 0501	14·8568 4167	14·4957 9617	14·1477 7489
24	15·6448 2411	15·2469 6314	14·8640 7307	14·4954 7837
25	16·0432 0396	15·6220 7994	15·2173 3627	14·8282 0896
26	16·4271 8454	15·9827 6918	15·5561 9787	15·1466 1145
27	16·7972 8630	16·3295 8575	15·8812 4496	15·4513 0282
28	17·1540 1089	16·6630 6322	16·1930 4072	15·7428 7351
29	17·4978 4183	16·9837 1463	16·4921 2539	16·0218 8853
30	17·8292 4513	17·2920 3330	16·7790 1717	16·2888 8854
31	18·1486 7001	17·5884 9356	17·0542 1311	16·5443 9095
32	18·4565 4941	17·8735 5150	17·3181 9003	16·7888 9086
33	18·7533 0063	18·1476 4567	17·5714 0531	17·0228 6207
34	19·0393 2591	18·4111 9776	17·8142 9766	17·2467 5796
35	19·3150 1293	18·6646 1323	18·0472 8792	17·4610 1240
36	19·5807 3535	18·9082 8195	18·2707 7978	17·6660 4058
37	19·8368 5335	19·1425 7880	18·4851 6046	17·8622 3979
38	20·0837 1407	19·3678 6423	18·6908 0140	18·0499 9023
39	20·3216 5212	19·5844 8184	18·8880 5890	18·2296 5572
40	20·5509 8999	19·7927 7388	19·0772 7472	18·4015 8442
41	20·7720 3855	19·9930 5181	19·2587 7671	18·5661 0949
42	20·9850 9739	20·1856 2674	19·4328 7934	18·7235 4975
43	21·1904 5532	20·3707 9494	19·5998 8426	18·8742 1029
44	21·3883 9067	20·5488 4129	19·7600 8082	19·0183 8305
45	21·5791 7173	20·7200 3970	19·9137 4659	19·1563 4742
46	21·7630 5709	20·8846 5356	20·0611 4781	19·2883 7074
47	21·9402 9599	21·0429 3612	20·2025 3987	19·4147 0884
48	22·1111 2867	21·1951 3088	20·3381 6774	19·5356 0654
49	22·2757 8666	21·3414 7200	20·4682 6642	19·6512 9813
50	22·4344 9317	21·4821 8462	20·5930 6131	19·7620 0778

Tabelle I antizipativ.

Termin	2% [1]	$2\frac{1}{4}\%$ [2]	$3\frac{1}{2}\%$ [3]	4% [4]
1	1·0204 0816	1·0230 1790	1·0362 6943	1·0416 6667
2	1·0412 3282	1·0465 6563	1·0738 5433	1·0850 6944
3	1·0624 8247	1·0706 5538	1·1128 0242	1·1302 8067
4	1·0841 6578	1·0952 9962	1·1531 6313	1·1773 7570
5	1·1062 9162	1·1205 1112	1·1949 8769	1·2264 3302
6	1·1288 6900	1·1463 0293	1·2383 2922	1·2775 3440
7	1·1519 0714	1·1726 8842	1·2832 4271	1 3307 6500
8	1·1754 1545	1·1996 8125	1·3297 8519	1·3862 1354
9	1·1994 0352	1·2272 9540	1·3780 1575	1·4439 7243
10	1·2238 8114	1·2555 4516	1·4279 9559	1·5041 3795
11	1·2488 5831	1·2844 4518	1·4797 8818	1·5668 1037
12	1·2743 4521	1·3140 1041	1·5334 5925	1·6320 9413
13	1·3003 5226	1·3442 5618	1·5890 7694	1·7000 9805
14	1·3268 9006	1·3751 9814	1·6467 1186	1·7709 3547
15	1·3539 6945	1·4068 5231	1·7064 3716	1·8447 2445
16	1·3816 0148	1·4392 3510	1·7683 2866	1·9215 8797
17	1·4097 9743	1·4723 6328	1·8324 6494	2·0016 5414
18	1·4385 6880	1·5062 5399	1·8989 2739	2·0850 5639
19	1·4679 2735	1·5409 2480	1·9678 0041	2·1719 3374
20	1·4978 8505	1·5763 9366	2·0391 7141	2·2624 3098
21	1·5284 5413	1·6126 7893	2·1131 3099	2·3566 9894
22	1·5596 4707	1·6497 9942	2·1897 7305	2·4548 9473
23	1·5914 7661	1·6877 7434	2·2691 9487	2·5571 8201
24	1·6239 5572	1·7266 2337	2·3514 9727	2·6637 3126
25	1·6570 9767	1·7663 6662	2·4367 8474	2·7747 2006
26	1·6909 1599	1·8070 2467	2·5251 6553	2·8903 3340
27	1·7254 2448	1·8486 1859	2·6167 5185	3·0107 6395
28	1·7606 3723	1·8911 6991	2·7116 5995	3·1362 1245
29	1·7965 6860	1·9347 0068	2·8100 1031	3·2668 8797
30	1·8332 3326	1·9792 3343	2·9119 2778	3·4030 0830
31	1·8706 4619	2·0247 9123	3·0175 4174	3·5448 0032
32	1·9088 2264	2·0713 9768	3·1269 8626	3·6925 0033
33	1·9477 7821	2·1190 7691	3·2404 0027	3·8463 5451
34	1·9875 2878	2·1678 5362	3·3579 2774	4·0066 1928
35	2·0280 9059	2·2177 5306	3·4797 1787	4·1735 6175
36	2·0694 8020	2·2688 0109	3·6059 2525	4·3474 6016
37	2·1117 1449	2·3210 2413	3·7367 1010	4·5286 0433
38	2·1548 1070	2·3744 4924	3·8722 3845	4·7172 9618
39	2·1987 8643	2·4291 0408	4·0126 8233	4·9138 5019
40	2·2436 5962	2·4850 1696	4·1582 2003	5·1185 9394
41	2·2894 4859	2·5422 1684	4·3090 3630	5·3318 6869
42	2·3361 7203	2·6007 3334	4·4653 2259	5·5540 2989
43	2·3838 4902	2·6605 9677	4·6272 7730	5·7854 4780
44	2·4324 9900	2·7218 3813	4·7951 0601	6·0265 0812
45	2·4821 4183	2·7844 8913	4·9690 2177	6·2776 1263
46	2·5327 9779	2·8485 8223	5·1492 4536	6·5391 7982
47	2·5844 8754	2·9141 5062	5·3360 0555	6·8116 4565
48	2·6372 3218	2·9812 2826	5·5295 3943	7·0954 6422
49	2·6910 5325	2·0498 4988	5·7300 9268	7·3911 0856
50	2·7459 7270	2·1200 5103	5·9379 1987	7·6990 7141

[1] Identisch mit $2\frac{2}{49}\%$ dekursiv.
[2] " " $2\frac{118}{391}\%$ " .
[3] Identisch mit $3\frac{121}{193}\%$ dekursiv.
[4] " " $4\frac{1}{6}\%$ " .

Tabelle II antizipativ.

Termin	2%	$2\frac{1}{4}\%$	$3\frac{1}{2}\%$	4%
1	0·98	0·9775	0·965	0·96
2	0·9604	0·9555 0625	0·9312 25	0·9216
3	0·9411 92	0·9340 0736	0·8986 3213	0·8847 36
4	0·9223 6816	0·9129 9219	0·8671 8000	0·8493 4656
5	0·9039 2080	0·8924 4987	0·8368 2870	0·8153 7270
6	0·8858 4238	0·8723 6975	0·8075 3970	0·7827 5779
7	0·8681 2553	0·8527 4143	0·7792 7581	0·7514 4748
8	0·8507 6302	0·8335 5475	0·7520 0115	0·7213 8958
9	0·8337 4776	0·8147 9976	0·7256 8111	0·6925 3400
10	0·8170 7281	0·7964 6677	0·7002 8227	0·6648 3264
11	0·8007 3135	0·7785 4627	0·6757 7239	0·6382 3933
12	0·7847 1672	0·7610 2898	0·6521 2036	0·6127 0976
13	0·7690 2239	0·7439 0582	0·6292 9615	0·5882 0137
14	0·7536 4194	0·7271 6794	0·6072 7078	0·5646 7331
15	0·7385 6910	0·7108 0666	0·5860 1631	0·5420 8638
16	0·7237 9772	0·6948 1351	0·5655 0573	0·5204 0292
17	0·7093 2177	0·6791 8021	0·5457 1303	0·4995 8681
18	0·6951 3533	0·6638 9866	0·5266 1308	0·4796 0334
19	0·6812 3262	0·6489 6094	0·5081 8162	0·4604 1920
20	0·6676 0797	0·6343 5931	0·4903 9526	0·4420 0243
21	0·6542 5581	0·6200 8623	0·4732 3143	0·4243 2234
22	0·6411 7070	0·6061 3429	0·4566 6833	0·4073 4944
23	0·6283 4728	0·5924 9627	0·4406 8494	0·3910 5547
24	0·6157 8034	0·5791 6510	0·4252 6096	0·3754 1325
25	0·6034 6473	0·5661 3389	0·4103 7683	0·3603 9672
26	0·5913 9544	0·5533 9588	0·3960 1364	0·3459 8085
27	0·5795 6753	0·5409 4447	0·3821 5316	0·3321 4161
28	0·5679 7618	0·5287 7322	0·3687 7780	0·3188 5595
29	0·5566 1665	0·5168 7582	0·3558 7058	0·3061 0171
30	0·5454 8432	0·5052 4611	0·3434 1511	0·2938 5764
31	0·5345 7463	0·4938 7808	0·3313 9558	0·2821 0334
32	0·5238 8314	0·4827 6582	0·3197 9674	0·2708 1920
33	0·5134 0548	0·4719 0359	0·3086 0385	0·2599 8644
34	0·5031 3737	0·4612 8576	0·2978 0272	0·2495 8698
35	0·4930 7462	0·4509 0683	0·2873 7962	0·2396 0350
36	0·4832 1313	0·4407 6142	0·2773 2133	0·2300 1936
37	0 4735 4887	0·4308 4429	0·2676 1509	0·2208 1858
38	0·4640 7789	0·4211 5030	0·2582 4856	0·2119 8584
39	0·4547 9633	0·4116 7441	0·2492 0986	0·2035 0641
40	0·4457 0040	0·4024 1174	0·2404 8751	0·1953 6615
41	0·4367 8640	0·3933 5748	0·2320 7045	0·1875 5151
42	0·4280 5067	0·3845 0693	0·2239 4799	0·1800 4945
43	0 4194 8965	0·3758 5553	0·2161 0981	0·1728 4747
44	0·4110 9986	0·3673 9878	0·2085 4596	0·1659 3357
45	0·4028 7786	0·3591 3231	0·2012 4685	0·1592 9623
46	0·3948 2031	0·3510 5183	0·1942 0321	0·1529 2438
47	0·3869 2390	0·3431 5316	0·1847 0610	0·1468 0740
48	0·3791 8542	0·3354 3222	0·1808 4689	0·1409 3511
49	0·3716 0171	0·3278 8499	0 1745 1725	0·1352 9770
50	0·3641 6968	0·3205 0758	0·1684 0914	0·1298 8579

Tabelle III antizipativ.

Termin	2% [1]	2¼% [2]	3½% [3]	4% [4]
1	1·0204 0816	1·0230 1790	1·0362 6943	1·0416 6667
2	2·0616 4098	2·0695 8353	2·1101 2376	2·1267 3611
3	3·1241 2345	3·1402 3891	3·2229 2618	3·2570 1678
4	4·2082 8924	4·2355 3852	4·3760 8930	4·4343 9248
5	5·3145 8085	5·3560 4964	5·5710 7700	5·6608 2550
6	6·4434 4985	6·5023 5257	6·8094 0622	6·9383 5990
7	7·5953 5699	7·6750 4100	8·0926 4893	8·2691 2489
8	8·7707 7244	8·8747 2225	9·4224 3412	9·6553 3843
9	9·9701 7596	10·1020 1764	10·8004 4987	11·0993 1087
10	11·1940 5710	11·3575 6281	12·2284 4546	12·6034 4882
11	12·4429 1541	12·6420 0799	13·7082 3364	14·1702 5919
12	13·7172 6062	13·9560 1840	15·2416 9289	15·8023 5332
13	15·0176 1288	15·3002 7458	16·8307 6983	17·5024 5137
14	16·3445 0294	16·6754 7272	18·4774 8169	19·2733 8685
15	17·6984 7239	18·0823 2503	20·1839 1885	21·1181 1130
16	19·0800 7386	19·5215 6013	21·9522 4751	23·0396 9927
17	20·4898 7129	20·9939 2341	23·7847 1245	25·0413 5341
18	21·9284 4009	22·5001 7740	25·6836 3984	27·1264 0980
19	23·3963 6744	24·0411 0220	27·6514 4025	29·2983 4354
20	24·8942 5249	25·6174 9586	29·6906 1166	31·5607 7452
21	26·4227 0662	27·2301 7479	31·8037 4265	33·9174 7346
22	27·9823 5369	28·8799 7421	33·9935 1570	36·3723 6819
23	29·5738 3030	30·5677 4855	36·2627 1057	38·9295 5019
24	31·1977 8602	32·2943 7192	38·6142 0785	41·5932 8145
25	32·8548 8370	34·0607 3854	41·0509 9259	44·3680 0151
26	34·5457 9969	35·8677 6321	43·5761 5812	47·2583 3491
27	36·2712 2417	37·7163 8180	46·1929 0997	50·2690 9886
28	38·0318 6140	39·6075 5171	48·9045 6992	53·4053 1132
29	39·8284 3000	41·5422 5239	51·7145 8023	56·6721 9929
30	41·6616 6327	43·5214 8582	54·6265 0801	60·0752 0759
31	43·5323 0945	45·5462 7706	57·6440 4975	63·6200 0791
32	45·4411 3210	47·6176 7474	60·7710 3601	67·3125 0824
33	47·3889 1030	49·7367 5165	64·0114 3628	71·1588 6275
34	49·3764 3908	51·9046 0527	67·3693 6402	75·1654 8203
35	51·4045 2968	54·1223 5833	70·8490 8189	79·3390 4378
36	53·4740 0988	56·3911 5942	74·4550 0714	83·6865 0394
37	55·5857 2436	58·7121 8355	78·1917 1724	88·2151 0827
38	57·7405 3506	61·0866 3278	82·0639 5569	92·9324 0444
39	59·9393 2149	63·5157 3686	86·0766 3802	97·8462 5463
40	62·1829 8112	66·0007 5383	90·2348 5805	102·9648 4857
41	64·4724 2971	68·5429 7067	94·5438 9435	108·2967 1726
42	66·8086 0175	71·1437 0401	99·0092 1695	113·8507 4715
43	69·1924 5076	73·8043 0077	103·6364 9424	119·6361 9495
44	71·6249 4976	76·5261 3890	108·4316 0025	125·6627 0307
45	74·1070 9159	79·3106 2803	113·4006 2202	131·9403 1570
46	76·6398 8938	82·1592 1026	118·5498 6738	138·4794 9552
47	79·2243 7691	85·0733 6088	123·8858 7293	145·2911 4117
48	81·8616 0910	88·0545 8913	129·4154 1237	152·3866 0538
49	84·5526 6234	91·1044 3901	135·1455 0504	159·7777 1394
50	87·2986 3504	94·2244 9004	141·0834 2492	167·4767 8535

[1] Identisch mit $2^{2}/_{49}$% dekursiv.
[2] " " $2^{118}/_{381}$% " .
[3] Identisch mit $3^{121}/_{193}$% dekursiv.
[4] " " $4^{1}/_{6}$% " .

Tabelle IV antizipativ.

Termin	2%	2¼%	3½%	4%
1	0·98	0·9775	0·965	0·96
2	1·9404	1·9330 0625	1·8962 25	1·8816
3	2·8815 92	2·8670 1361	2·7948 5713	2·7663 36
4	3·8039 6016	3·7800 0580	3·6620 3713	3·6156 8256
5	4·7078 8096	4·6724 5567	4·4988 6583	4·4310 5526
6	5·5937 2334	5·5448 2542	5·3064 0552	5·2138 1305
7	6·4618 4887	6·3975 6685	6·0856 8133	5·9652 6053
8	7·3126 1189	7·2311 2159	6·8376 8248	6·6866 5010
9	8·1463 5966	8·0459 2136	7·5633 6360	7·3791 8410
10	8·9634 3246	8·8423 8813	8·2636 4587	8·0440 1674
11	9·7641 6381	9·6209 3439	8·9394 1826	8·6822 5607
12	10·5488 8054	10·3819 6337	9·5915 3863	9·2949 6582
13	11·3179 0293	11·1258 6919	10·2208 3477	9·8831 6719
14	12·0715 4487	11·8530 3714	10·8281 0556	10·4478 4050
15	12·8101 1397	12·5638 4380	11·4141 2186	10·9899 2688
16	13·5339 1169	13·2586 5732	11·9796 2760	11·5103 2981
17	14·2432 3346	13·9378 3753	12·5253 4063	12·0099 1662
18	14·9383 6879	14·6017 3618	13·0519 5371	12·4895 1995
19	15·6196 0141	15·2506 9712	13·5601 3533	12·9499 3915
20	16·2872 0938	15·8850 5643	14·0505 3059	13·3919 4159
21	16·9414 6520	16·5051 4266	14·5237 6202	13·8162 6392
22	17·5826 3589	17·1112 7695	14·9804 3035	14·2236 1337
23	18·2109 8317	17·7037 7322	15·4211 1529	14·6146 6883
24	18·8267 6351	18·2829 3832	15·8463 7625	14·9900 8208
25	19·4302 2824	18·8490 7221	16·2567 5308	15·3504 7880
26	20·0216 2368	19·4024 6809	16·6527 6673	15·6964 5964
27	20·6011 9120	19·9434 1256	17·0349 1989	16·0286 0126
28	21·1691 6738	20·4721 8577	17·4036 9769	16·3474 5721
29	21·7257 8403	20·9890 6159	17·7595 6828	16·6535 5892
30	22·2712 6835	21·4943 0771	18·1029 8339	16·9474 1656
31	22·8058 4298	21·9881 8578	18·4343 7897	17·2295 1990
32	23·3297 2612	22·4709 5160	18·7541 7570	17·5003 3910
33	23·8431 3160	22·9428 5519	19·0627 7955	17·7603 2554
34	24·3462 6897	23·4041 4095	19·3605 8227	18·0099 1252
35	24·8393 4359	23·8550 4778	19·6479 6189	18·2495 1602
36	25·3225 5672	24·2958 0920	19·9252 8322	18·4795 3538
37	25·7961 0558	24·7266 5350	20·1928 9831	18·7003 5396
38	26·2601 8347	25·1478 0379	20·4511 4687	18·9123 3980
39	26·7149 7980	25·5594 7821	20·7003 5673	19·1158 4621
40	27·1606 8021	25·9618 8995	20·9408 4424	19·3112 1236
41	27·5974 6660	26·3552 4742	21·1729 1470	19·4987 6387
42	28·0255 1727	26·7397 5436	21·3968 6268	19·6788 1331
43	28·4450 0692	27·1156 0988	21·6129 7249	19·8516 6078
44	28·8561 0679	27·4830 0866	21·8215 1845	20·0175 9435
45	29·2589 8465	27·8421 4097	22.0227 6530	20·1768 9058
46	29·6538 0496	28·1931 9280	22·2169 6852	20·3298 1495
47	30·0407 2886	28·5363 4596	22·4043 7462	20·4766 2235
48	30·4199 1428	28·8717 7817	22·5852·2151	20·6175 5746
49	30·7915 1600	29·1996 6316	22·7597 3876	20·7528 5516
50	31·1556 8568	29·5201 7074	22·9281 4790	20·8827 4096

Sterblichkeits-Tafeln.

Zeichen-Erklärung.

x = Alter,

l_x = Anzahl der Lebenden im Alter von x Jahren,

d_x = Anzahl der Sterbefälle zwischen den Altern x und $x+1$,

$D_x = \frac{l_x}{r^x} = v^x . l_x =$ diskontierte Zahl der Lebenden (vom Alter x),

$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$

$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots$

$C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} = v^{x+1} . d_x =$ diskontierte Zahl der Toten (vom Alter x),

$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots$

a_x = Barwert der an eine x-jährige Person lebenslänglich *im vorhinein* zahlbaren Leibrente 1.

a_{xy} = Barwert der, solange beide Personen im Alter von x und y Jahren leben, jährlich *im vorhinein* zahlbaren Verbindungsrente 1.

$$d = \frac{r-1}{r} \begin{cases} \text{für } p = 3^1/_2 \ldots\ldots 0{\cdot}0338\,1643 \\ \;\;,, \;\; p = 4 \ldots\ldots\ldots 0{\cdot}0384\,6154. \end{cases}$$

Deutsche Rentner-Sterbetafel (Männer und Frauen).

Zinsfuß $3^1/_2$ %.

x	l_x	D_x	N_x	S_x	a_x
25	100 000	42 315	928 629	1631 1744	21·946
26	99 646	40 739	886 314	1538 3115	21·756
27	99 289	39 220	845 575	1449 6801	21·560
28	98 929	37 757	806 355	1365 1226	21·357
29	98 562	36 345	768 598	1284 4871	21·148
30	98 188	34 982	732 253	1207 6273	20·932
31	97 805	33 668	697 271	1134 4020	20·710
32	97 412	32 398	663 603	1064 6749	20·483
33	97 010	31 174	631 205	998 3146	20·248
34	96 596	29 991	600 031	935 1941	20·007
35	96 171	28 849	570 040	875 1910	19·759
36	95 732	27 746	541 191	818 1870	19·505
37	95 279	26 681	513 445	764 0679	19·244
38	94 810	25 652	486 764	712 7234	18·975
39	94 321	24 657	461 112	664 0470	18·701
40	93 811	23 694	436 455	617 9358	18·421
41	93 277	22 768	412 761	574 2903	18·133
42	92 751	21 860	389 993	533 0142	17·840
43	92 120	20 986	368 133	494 0149	17·542
44	91 490	20 137	347 147	457 2016	17·239
45	90 821	19 314	327 010	422 4869	16·931
46	90 108	18 514	307 696	389 7859	16·620
47	89 349	17 738	289 182	359 0163	16·303
48	88 539	16 982	271 444	330 0981	15·984
49	87 678	16 249	254 462	302 9537	15·660
50	86 766	15 536	238 213	277 5075	15·333
51	85 799	14 843	222 677	253 6862	15·002
52	84 775	14 170	207 834	231 4185	14·667
53	83 695	13 516	193 664	210 6351	14·328
54	82 558	12 882	180 148	191 2687	13·985
55	81 353	12 265	167 266	173 2539	13·638
56	80 078	11 664	155 001	156 5273	13·288
57	78 729	11 080	143 337	141 0272	12·937
58	77 305	10 512	132 257	126 6935	12·582
59	75 803	9 958·8	121 745·1	113 4677·5	12·225
60	74 220	9 421·2	111 786·3	101 2932·4	11·866
61	72 555	8 898·3	102 365·1	90 1146·1	11·504
62	70 798	8 389·2	93 466·8	79 8781·0	11·141
63	69 946	7 893·5	85 077·6	70 5314·2	10·778
64	66 999	7 411·2	77 184.1	62 0236·6	10·414

l_x	D_x	N_x	S_x	a_x	x
64 956	6 942·2	69 772·9	543 052·5	10·051	65
62 796	6 484·4	62 830·7	473 279·6	9·6895	66
60 520	6 038·1	56 346·3	410 448·9	9·3318	67
58 128	5 603·3	50 308·2	354 102·6	8·9783	68
55 624	5 180·6	44 704·9	303 794·4	8·6293	69
53 012	4 770·4	39 524·3	259 089·5	8·2853	70
50 298	4 373·1	34 753·9	219 565·2	7·9472	71
47 491	3 989·4	30 380·8	184 811·3	7·6154	72
44 603	3 620·1	26 391·4	154 430·5	7·2901	73
41 648	3 266·0	22 771·3	128 039·1	6·9722	74
38 657	2 928·9	19 505·3	105 267·8	6·6595	75
35 648	2 609·6	16 576·4	85 762·5	6·3520	76
32 640	2 308·6	13 966·8	69 186·1	6·0500	77
29 654	2 026·5	11 658·2	55 219·3	5·7529	78
26 714	1 763·8	9 631·7	43 561·1	5·4607	79
23 843	1 521·0	7 867·9	33 929·4	5·1728	80
21 065	1 298·4	6 346·9	26 061·5	4·8884	81
18 376	1 094·3	5 048·5	19 714·6	4·6133	82
15 806	909·45	3 954·16	14 666·05	4·3479	83
13 384	744·05	3 044·71	10 711·89	4·0921	84
11 137	598·19	2 300·66	7 667·18	3 8461	85
9 088	471·63	1 702 47	5 366·52	3 6098	86
7 256	363·81	1 230·84	3 664·05	3·3832	87
5 653	273·86	867·03	2 433·21	3·1660	88
4 285	200·57	593·17	1 566·18	2·9575	89
3 149	142·41	392·60	973·01	2·7569	90
2 237	97·746	250·193	580·414	2·5597	91
1 521	64·213	152·447	330·221	2·3741	92
985	40·178	88·234	177·774	2·1962	93
602	23·725	48·056	89 540	2·0257	94
345	13·137	24·331	41·484	1·8520	95
183	6·7326	11·1943	17·1532	1·6621	96
89	3·1636	4·4617	5·9589	1·4098	97
32	1·0990	1·2981	1·4972	1·1829	98
6	0·19910	0·19910	0·19910	1·0000	99

Sterblichkeits-Tafel der 17 englischen Gesellschaften.

Zinsfuß $3^1/_2\,\%$.

x	l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x
10	100 000	676	70 891·88	1577 587·08	17 543·53	22·2534
11	99 324	674	68 031·55	1506 695·20	17 080·50	22·1470
12	98 650	672	65 284·92	1438 663·65	16 634·46	22·0367
13	97 978	671	62 647·54	1373 378·73	16 204·78	21·9223
14	97 307	671	60 114·49	1310 731·19	15 790·25	21·8039
15	96 636	671	57 681·12	1250 616·70	15 389·74	21·6816
16	95 965	672	55 343·58	1192 935·58	15 002·77	21·5551
17	95 293	673	53 097·62	1137 592·00	14 628·32	21·4245
18	94 620	675	50 939·73	1084 494·38	14 266·01	21·2898
19	93 954	677	48 866·03	1033 554·65	13 914·90	21·1508
20	93 268	680	46 873·31	984 688·62	13 574·67	21·0074
21	92 588	683	44 958·04	937 815·31	13 244·48	20·8598
22	91 905	686	43 117·29	892 857·27	12 924·05	20·7076
23	91 219	690	41 348 26	849 739·98	12 613·09	20·5508
24	90 529	694	39 647·82	808 391·72	12 310·90	20·3893
25	89 835	698	38 013·41	768 743·90	12 017·24	20·2230
26	89 137	703	36 442·56	730 730·49	11 731·87	20·0516
27	88 434	708	34 932·51	694 287·93	11 454·18	19·8751
28	87 726	714	33 481·01	659 355·42	11 183·97	19·6934
29	87 012	720	32 085·51	625 874·41	10 920·68	19·5065
30	86 292	727	30 743·98	593 788·90	10 664·16	19·3140
31	85 565	734	29 454·07	563 044·92	10 413·90	19·1160
32	84 831	742	28 213·92	533 590·85	10 169·780	18·9123
33	84 089	750	27 021·39	505 376·93	9 931·346	18·7028
34	83 339	758	25 874·76	478 355·54	9 698·489	18·4873
35	82 581	767	24 772·39	452 480·78	9 471·107	18·2655
36	81 814	776	23 712·37	427 708·39	9 248·805	18·0374
37	81 038	785	22 693·20	403 996·02	9 031·500	17·8025
38	80 253	795	21 713·41	381 302·82	8 819·109	17·5607
39	79 458	805	20 771·31	359 589·41	8 611·286	17 3118
40	78 653	815	19 865·58	338 818·10	8 407·966	17·0555
41	77 838	826	18 994·91	318 952 52	8 209·080	16·7915
42	77 012	839	18 157·82	299 957·61	8 014·327	16 5195
43	76 173	857	17 352·66	281 799·79	7 823·197	16·2396
44	75 316	881	16 577 23	264 447·13	7 634·570	15·9524
45	74 435	909	15 829·29	247 769·90	7 447·217	15·6589
46	73 526	944	15 107·23	232 040·61	7 260·447	15·3596
47	72 582	981	14 408·96	216 933·38	7 073·044	15·0554
48	71 601	1021	13 733·53	202 524·42	6 884·882	14·7467
49	70 580	1063	13 079·90	188 790·89	6 695·670	14·4337
50	69 517	1108	12 447·25	175 710·99	6 505·336	14·1164
51	68 409	1156	11 834·65	163 263·74	6 313·654	13·7954
52	67 253	1207	11 241·22	151 429·09	6 120·430	13·4709
53	66 046	1261	10 666·16	140 187·87	5 925·505	13·1432
54	64 785	1316	10 108·71	129 521·71	5 728·745	12·8129
55	63 469	1375	9568·468	119 412·995	5530·348	12·4798
56	62 094	1436	9044·615	109 844·527	5330·065	12·1447
57	60 658	1497	8536·663	100 799·912	5127·970	11·8078
58	59 161	1561	8044·429	92 263·249	4924·416	11·4692
59	57 600	1627	7567·316	84 218·820	4719·336	11·1293
60	55 973	1698	7104·894	76 651·504	4512·814	10·7885
61	54 275	1770	6656·386	69 546·610	4304·568	10·4481
62	52 505	1844	6221·555	62 890·224	4094·833	10·1084
63	50 661	1917	5800·050	56 668·669	3883·718	9·7704
64	48 744	1990	5391·862	50 868·619	3671·667	9·4343
65	46 754	2061	4996·847	45 476·757	3458·985	9·1011
66	44 693	2128	4615·050	40 479·910	3246·164	8·7713
67	42 565	2191	4246·677	35 864·860	3033·855	8 4454
68	40 374	2246	3891·867	31 618·183	2822·653	8·1242
69	38 128	2291	3551·075	27 726·316	2613·470	7·8079
70	35 837	2327	3224·833	24 175·241	2407·312	7·4966
71	33 510	2351	2913·464	20 950·408	2204·996	7·1909
72	31 159	2362	2617·449	18 036·944	2007·505	6·8910
73	28 797	2358	2337·231	15 419·495	1815·799	6·5973
74	26 439	2339	2073·286	13 082·264	1630·890	6·3099
75	24 100	2303	1825·958	11 008·978	1453·674	6·0292
76	21 797	2249	1595·622	9183·020	1285·086	5·7551
77	19 548	2179	1382·596	7587·398	1126·018	5·4878
78	17 369	2092	1186·937	6204·802	977·1124	5·2276
79	15 277	1987	1008·673	5017·865	838·9868	4·9747
80	13 290	1866	847·8070	4009·1923	712·2304	4·7289
81	11 424	1730	704·1252	3161·3853	597·2184	4·4898
82	9 694	1582	577·2904	2457·2601	494·1946	4·2565
83	8 112	1427	466·7442	1879·9697	403·1703	4·0278
84	6 685	1268	371·6310	1413·2255	323·8408	3·8028
85	5 417	1111	290·9572	1041·5945	255·7342	3·5799
86	4 306	958	223·4622	750·6373	198·0782	3·3591
87	3 348	811	167·8707	527·1751	150·0436	3·1404
88	2 537	673	122·9050	359·3044	110·75460	2·9234
89	1 864	545	87·24786	236·39939	79·25366	2·7095
90	1 319	427	59·65039	149·15153	54·60661	2·5004
91	892	322	38·97562	89·50114	35·94900	2·2963
92	570	231	24·06371	50·52552	22·35512	2·0997
93	339	155	13·82761	26·46181	12·932770	1·9137
94	184	95	7·251451	12·634204	6·824206	1·7423
95	89	52	3·388884	5·382753	3·206858	1·5884
96	37	24	1·361219	1·993869	1·293794	1·4648
97	13	9	0·4620931	0·6326497	0·4406990	1·3691
98	4	3	0·1373744	0·1705566	0·1316067	1·2415
99	1	1	0·03318221	0·03318221	0·03206011	1·0000

Barwerte der Verbindungsrente „1" (a_{xy}) nach der Tafel der 17 englischen Gesellschaften.

Zinsfuß 3½%.

Alter der jüngeren Person	Altersdifferenz in Jahren								Alter der jüngeren Person
	0	1	2	3	4	5	10	15	
21	17·770	17·692	17·610	17·522	17·430	17·332	16·763	16·039	21
22	17·616	17·536	17·451	17·360	17·265	17·165	16·578	15·832	22
23	17·457	17·374	17·287	17·194	17·096	16·993	16·388	15·618	23
24	17·294	17·209	17·118	17·023	16·922	16·815	16192	15·397	24
25	17·126	17·038	16·945	16·847	16·743	16·633	15·991	15·170	25
26	16·953	16·862	16·767	16·665	16·558	16·445	15·784	14·935	26
27	16·774	16·681	16·583	16·479	16·369	16·252	15·571	14·694	27
28	16·591	16·496	16·394	16·287	16·174	16·054	15·351	14·445	28
29	16·403	16·304	16·200	16·090	15·973	15·850	15·125	14·189	29
30	16·209	16·108	16·001	15·887	15·767	15·641	14·892	13·927	30
31	16·010	15·906	15·796	15·679	15·556	15·425	14·652	13·660	31
32	15·805	15·699	15·586	15·465	15·338	15·203	14·405	13·389	32
33	15·595	15·485	15·369	15·245	15·114	14·975	14·151	13·113	33
34	15·379	15·266	15·146	15·019	14·884	14·740	13·890	12·832	34
35	15·157	15·041	14·917	14·786	14·647	14·499	13·623	12·548	35
36	14·928	14·809	14·682	14·546	14·403	14·250	13·350	12·260	36
37	14·693	14·570	14·439	14·299	14·151	13·993	13·073	11 967	37
38	14·451	14·324	14·190	14·045	13·892	13·729	12·791	11·672	38
39	14·202	14·071	13·932	13·783	13·625	13·458	12·504	11·373	39
40	13·945	13·810	13·667	13·513	13·351	13·180	12·212	11·071	40
41	13·680	13·541	13·393	13·236	13·070	12·896	11·916	10·766	41
42	13·407	13·264	13·112	12·951	12·782	12·606	11·615	10·458	42
43	13·126	12·979	12·824	12·660	12·489	12·311	11·311	10·147	43
44	12·837	12·688	12·530	12·364	12·192	12·012	11·003	9·8344	44
45	12·543	12·391	12·232	12 064	11·890	11·708	10·693	9·5207	45
46	12·245	12·091	11·929	11·761	11·585	11·402	10·381	9·2073	46
47	11·943	11·788	11·625	11·455	11·278	11·093	10·069	8·8951	47
48	11·638	11·482	11·318	11·147	10·969	10·783	9·7558	8·5849	48
49	11·331	11·174	11·010	10·837	10·658	10·472	9·4425	8·2772	49
50	11·023	10·864	10·699	10·526	10·346	10·160	9·1294	7·9725	50
51	10·712	10·553	10·388	10·214	10·034	9·8474	8·8177	7·6716	51
52	10·401	10·241	10·076	9·9016	9·7216	9·5350	8·5079	7·3750	52
53	10·089	9·9290	9·7635	9·5893	9·4094	9·2227	8·2007	7·0833	53
54	9·7764	9·6168	9·4515	9·2775	9·0977	8·9113	7·8966	6·7969	54
55	9·4641	9·3048	9·1401	8·9661	8·7867	8·6009	7 5961	6·5157	55
56	9·1526	8·9938	8·8295	8·6559	8·4774	8·2927	7·2999	6·2403	56
57	8·8422	8·6838	8·5201	8·3473	8·1699	7·9871	7·0085	5·9711	57
58	8·5327	8·3750	8·2123	8·0407	7·8652	7·6846	6·7222	5·7079	58
59	8·2246	8·0678	7·9069	7·7370	7·5637	7·3855	6·4413	5·4511	59
60	7·9185	7·7633	7·6044	7·4366	7·2658	7·0906	6·1659	5·2009	60
61	7·6157	7·4624	7·3060	7·1405	6·9726	6·8007	5·8969	4·9578	61
62	7·3167	7·1658	7·0120	6·8493	6·6847	6·5164	5·6344	4·7215	62
63	7·0224	6·8739	6·7234	6·5638	6·4027	6·2384	5·3790	4·4928	63
64	6·7331	6·5876	6·4406	6·2842	6·1271	5·9670	5·1306	4·2717	64
65	6·4496	6·3073	6·1642	6·0113	5·8583	5·7022	4·8897	4·0582	65
66	6·1725	6·0337	5·8940	5·7455	5·5965	5·4448	4·6564	3·8521	66
67	5·9022	5·7672	5·6329	5·4869	5·3421	5·1948	4·4308	3·6526	67
68	5·6394	5·5082	5·3784	5·2359	5·0955	4·9527	4·2132	3·4589	68
69	5·3842	5·2567	5·1318	4·9927	4·8567	4·7184	4·0038	3·2701	69
70	5·1364	5·0128	4·8931	4·7572	4·6256	4·4919	3·8022	3·0849	70

Sterblichkeits-Tafel der 17 englischen Gesellschaften.

Zinsfuß 4%.

x	l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x
10	100 000	676	67 556·42	1 381 771·36	14 411·37	20·4536
11	99 324	674	64 518·98	1 314 214·94	13 972·25	20·3694
12	98 650	672	61 616·50	1 249 695·96	13 551·27	20·2818
13	97 978	671	58 843·05	1 188 079·46	13 147·68	20·1906
14	97 307	671	56 192·37	1 129 23[illegible]·41	12 760·20	20·0956
15	96 636	671	53 658·54	1 073 044·04	12 387·62	19·9977
16	95 965	672	51 236·50	1 019 385·50	12 029·36	19·8957
17	95 293	673	48 920·88	968 149·00	11 684·38	19·7901
18	94 620	675	46 707·09	919 228·12	11 352·17	19·6807
19	93 945	677	44 590·28	872 521·03	11 031·78	19·5675
20	93 268	680	42 566·30	827 930·75	10 722·81	19·4504
21	92 588	683	40 630·73	785 364·45	10 424·40	19·3293
22	91 905	686	38 779·81	744 733·72	10 136·21	19·2042
23	91 219	690	37 009·95	705 953·91	9 857·88	19·0747
24	90 529	694	35 317·31	668 943·96	9 588·69	18·9410
25	89 835	698	33 698·62	633 626·65	9 328·36	18·8028
26	89 137	703	32 150·76	599 928·03	9 076·60	18·6598
27	88 434	708	30 670·38	567 777·27	8 832·79	18·5123
28	87 726	714	29 254·64	537 106·89	8 596·69	18·3597
29	87 012	720	27 900·52	507 852·25	8 367·74	18·2022
30	86 292	727	26 605·43	479 951·73	8 145·75	18·0396
31	85 565	734	25 366·62	453 346·30	7 930·23	17·8718
32	84 831	742	24 181·75	427 979·68	7 720·99	17·6985
33	84 089	750	23 048·31	403 797·93	7 517·62	17·5197
34	83 339	758	21 964·17	380 749·62	7 319·95	17·3350
35	82 581	767	20 927·30	358 785·45	7 127·86	17·1444
36	81 814	776	19 935·51	337 858·15	6 940·97	16·9476
37	81 038	785	18 986 95	317 922·64	6 759·15	16·7443
38	80 253	795	18 079·83	298 935·69	6 582·31	16·5342
39	79 458	805	17 212·24	280 855·86	6 410·09	16·3172
40	78 653	815	16 382·56	263 643·62	6 242·42	16·0929
41	77 838	826	15 589·23	247 261·06	6 079·19	15·8610
42	77 012	839	14 830·58	231 671·83	5 920·13	15·6212
43	76 173	857	14 104·82	216 841·25	5 764·77	15·3736
44	75 316	881	13 409·74	202 736·43	5 612·18	15·1186
45	74 435	909	12 743·15	189 326·69	5 461·36	14·8571
46	73 526	944	12 103·40	176 583·54	5 311·72	14·5896
47	72 582	981	11 488·46	164 480·14	5 162·31	14·3170
48	71 601	1021	10 897·30	152 991·68	5 013·00	14·0394
49	70 580	1063	10 328·76	142 094·38	4 863·59	13·7572
50	69 517	1108	9 781·919	131 765·619	4 714·01	13·4703
51	68 409	1156	9 255·778	121 983·700	4 564·10	13·1792
52	67 253	1207	8 749·395	112 727·922	4 413·71	12·8841
53	66 046	1261	8 261·892	103 978·527	4 262·72	12·5853
54	64 785	1316	7 792·452	95 716·635	4 111·04	12·2833

l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x	x
63 469	1375	7 340·540	87 924·183	3 958·84	11·9779	55
62 094	1436	6 905·301	80 583·643	3 805·93	11·6698	56
60 658	1497	6 486·161	73 678·342	3 652·38	11·3593	57
59 161	1561	6 082·776	67 192·181	3 498·46	11·0463	58
57 600	1627	5 694·498	61 109·405	3 344·14	10·7313	59
55 973	1698	5 320·816	55 414·907	3 189·47	10·4147	60
54 275	1770	4 960·965	50 094·091	3 034·27	10·0977	61
52 505	1844	4 614·595	45 133·126	2 878·71	9·7805	62
50 661	1917	4 281·278	40 518·531	2 722·87	9·4641	63
48 744	1990	3 960·841	36 237·253	2 567·10	9·1489	64
46 754	2061	3 653·017	32 276·412	2 411·62	8·8356	65
44 693	2128	3 357·679	28 623·395	2 256·78	8·5248	66
42 565	2191	3 074·814	25 265·716	2 103·06	8·2170	67
40 374	2246	2 804·366	22 190·902	1 950·87	7·9130	68
38 128	2291	2 546·500	19 386·536	1 800·86	7·6130	69
35 837	2327	2 301·431	16 840·036	1 653·74	7·3172	70
33 510	2351	2 069 223	14 538·605	1 510·05	7·0261	71
31 159	2362	1 850·048	12 469·382	1 370·46	6·7400	72
28 797	2358	1 644·044	10 619·334	1 235·61	6·4594	73
26 439	2339	1 451·369	8 975·290	1 106·17	6·1841	74
24 100	2303	1 272·086	7 523·921	982·705	5·9147	75
21 797	2249	1 106·275	6 251·835	865·819	5·6512	76
19 548	2179	953·9711	5 145·5598	756·065	5·3938	77
17 369	2092	815·0314	4 191·5887	653·816	5·1428	78
15 277	1987	689·2936	3 376·5573	559·426	4·8987	79
13 290	1866	576·5777	2 687·2637	473·221	4·6607	80
11 424	1730	476·5601	2 110·6860	395·380	4·4290	81
9 694	1582	388·8384	1 634·1259	325·987	4·2026	82
8 112	1427	312·8677	1 245·2875	264·972	3·9803	83
6 685	1268	247·9139	932·4198	212·052	3·7611	84
5 417	1111	193·1635	684·5059	166·836	3·5437	85
4 306	958	147·6410	491·3424	128·743	3·3280	86
3 348	811	110·3786	343·7014	97·1593	3·1139	87
2 537	673	80·42417	233·32282	71·4502	2·9011	88
1 864	545	56·81705	152·89865	50·9363	2·6911	89
1 319	427	38·65243	96·08160	34·9630	2·4854	90
892	322	25·13801	57·42317	22·9294	2·2843	91
570	231	15·44570	32·28516	14·2040	2·0903	92
339	155	8·832815	16·839461	8·18514	1·9065	93
184	95	4·609820	8·006646	4·30187	1·7369	94
89	52	2·143990	3·396826	2·01334	1·5844	95
37	24	0·8570401	1·2528356	0·808854	1·4618	96
13	9	0·2895406	0·3957955	0·274318	1·3670	97
4	3	0·08566289	0·10625493	0·0815762	1·2403	98
1	1	0·02059204	0·02059204	0·0198000	1·0000	99

Sterblichkeits-Tafel der 23 deutschen Gesellschaften.

MWI $3^1/_2$%.

x	l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x
20	100 000	919	50 256·59	1031 223·70	15 384·28	20·5192
21	99 081	908	48 110·85	980 967·11	14 938·04	20·3897
22	98 173	887	46 057·92	932 856·26	14 512·05	20·2540
23	97 286	861	44 098·35	886 798·34	14 109·99	20·1096
24	96 425	835	42 230·02	842 699·99	13 732·91	19·9550
25	95 590	816	40 448·62	800 469·97	13 379·58	19·7898
26	94 774	804	38 747·18	760 021·35	13 045·97	19·6149
27	93 970	797	37 119·30	721 274·17	12 728·38	19·4312
28	93 173	795	35 559·88	684 154·87	12 424·20	19·2395
29	92 378	800	34 064·22	648 594·99	12 131·05	19·0404
30	91 578	808	32 627·26	614 530·77	11 846·03	18·8349
31	90 770	818	31 245·79	581 903·51	11 567·89	18·6234
32	89 952	831	29 917·11	550 657·72	11 295·83	18·4061
33	89 121	841	28 638·38	520 740·61	11 028·79	18·1833
34	88 280	856	27 408·83	492 102·23	10 767·68	17·9541
35	87 424	873	26 225·18	464 693·40	10 510·90	17·7194
36	86 551	889	25 085·31	438 468·22	10 257·88	17·4791
37	85 662	906	23 988·07	413 382·91	10 008·93	17·2329
38	84 756	928	22 931·75	389 394·84	9 763·80	16·9806
39	83 828	950	21 913·69	366 463·09	9 521·21	16·7230
40	82 878	975	20 932·70	344 549·40	9 281·27	16·4599
41	81 903	1006	19 986·91	323 616·70	9 043·34	16·1914
42	80 897	1035	19 073·82	303 629·79	8 806·15	15·9187
43	79 862	1063	18 193·03	284 555·97	8 570·37	15·6409
44	78 799	1092	17 343·84	266 362·94	8 336·40	15·3578
45	77 707	1117	16 525·11	249 019·10	8 104·18	15·0691
46	76 590	1140	15 736·78	232 493·99	7 874·67	14·7739
47	75 450	1169	14 978·31	216 757·21	7 648·36	14·4714
48	74 281	1204	14 247·57	201 778·90	7 424·14	14·1623
49	73 077	1246	13 542·65	187 531·33	7 201·01	13·8475
50	71 831	1303	12 861·58	173 988·68	6 977·91	13·5278
51	70 528	1362	12 201·23	161 127·10	6 752·49	13·2058
52	69 166	1425	11 560·98	148 925·87	6 524·83	12·8818
53	67 741	1490	10 939·89	137 364·89	6 294·70	12·5563
54	66 251	1556	10 337·45	126 425·00	6 062·21	12·2298
55	64 695	1621	9 753·298	116 087·548	5 827·63	11·9024
56	63 074	1691	9 187·361	106 334·250	5 591·51	11·5740
57	61 383	1759	8 638·695	97 146·889	5 353·53	11·2456
58	59 624	1832	8 107·385	88 508 194	5 114·35	10·9170
59	57 792	1900	7 592·540	80 400·809	4 873·67	10·5894

l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x	x
55 892	1976	7 094·612	72 808·269	4 632·49	10·2625	60
53 916	2038	6 612·357	65 713·657	4 390·15	9·9380	61
51 878	2097	6 147·259	59 101·300	4 148·66	9·6143	62
49 781	2149	5 699·301	52 954·041	3 908·58	9·2913	63
47 632	2197	5 268·857	47 254·740	3 670·87	8·9687	64
45 435	2246	4 855·878	41 985·883	3 436·06	8·6464	65
43 189	2302	4 459·745	37 130·005	3 204·14	8·3256	66
40 887	2355	4 079·264	32 670·260	2 974·47	8·0089	67
38 532	2399	3 714·307	28 590·996	2 747·46	7·6975	68
36 133	2432	3 365·270	24 876·689	2 524·03	7·3922	69
33 701	2452	3 032·622	21 511·419	2 305·18	7·0933	70
31 249	2455	2 716·885	18 478·797	2 092·00	6·8015	71
28 794	2436	2 418·782	15 761·912	1 885·77	6·5165	72
26 358	2406	2 139·276	13 343·130	1 688·06	6·2372	73
23 952	2360	1 878·261	11 203·854	1 499·39	5·9650	74
21 592	2299	1 635·937	9 325·593	1 320·58	5·7005	75
19 293	2210	1 412·320	7 689·656	1 152·28	5·4447	76
17 083	2103	1 208·251	6 277·336	995·97	5·1954	77
14 980	1982	1 023·681	5 069·085	852·26	4·9518	78
12 998	1848	858·2007	4 045·4044	721·40	4·7138	79
11 150	1730	711·2903	3 187·2037	603·51	4·4809	80
9 420	1599	580·6074	2 475·9134	496·883	4·2644	81
7 821	1443	465·7508	1 895·3060	401·660	4·0694	82
6 378	1264	366·9742	1 429·5552	318·633	3·8955	83
5 114	1080	384·2964	1 062·5810	248·365	3·7376	84
4 034	896	216·6737	778·2846	190·356	3·5920	85
3 138	715	162·8482	561·6109	143·858	3·4487	86
2 423	566	121·4907	398·7627	108·007	3·2822	87
1 857	442	89·96242	277·27195	80·587	3·0821	88
1 415	344	66·23161	187·30952	59·898	2·8281	89
1 071	347	48·43485	121·07792	44·341	2·4998	90*
724	261	31·63492	72·64307	29·179	2·2963	91
463	188	19·54649	41·00815	18·1598	2·0980	92
275	126	11·21709	21·46166	10·4914	1·9133	93
149	77	5·872099	10·244574	5·5257	1·7446	94
72	42	2·741569	4·372475	2·5937	1·5949	95
30	19	1·103691	1·630906	1·04854	1·4777	96
11	8	0·3910018	0·5272148	0·37317	1·3484	97
3	2	0·1030308	0·1362130	0·098424	1·3221	98
1	1	0·03318221	0·03318221	0·032060	1·0000	99

* Die offizielle Tafel bricht beim Alter 90 ab.

Österreichisch-ungarische

Zinsfuß

x	l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x
20	100 000	349	50 257	1 087 222	13 490·68	21·633
21	99 651	361	48 388	1 036 965	13 321·22	21·431
22	99 290	373	46 582	988 577	13 151·86	21·222
23	98 917	386	44 838	941 995	12 982·78	21·009
24	98 531	401	43 153	897 157	12 813·73	20·790
25	98 130	417	41 524	854 004	12 644·05	20·567
26	97 713	433	39 949	812 480	12 473·56	20·338
27	97 280	451	38 427	772 531	12 302·52	20·104
28	96 829	471	36 955	734 104	12 130·40	19·865
29	96 358	491	35 532	697 149	11 956·72	19·620
30	95 867	512	34 155	661 617	11 781·79	19·371
31	95 355	537	32 824	627 462	11 605 54	19·116
32	94 818	562	31 536	594 638	11 426·94	18·856
33	94 256	589	30 288	563 102	11 246·35	18·591
34	93 667	619	29 082	532 814	11 063·48	18·321
35	93 048	649	27 913	503 732	10 877 79	18·047
36	92 399	682	26 780	475 819	10 689·69	17·768
37	91 717	717	25 684	449 039	10 498·71	17·484
38	91 000	755	24 621	423 355	10 304·72	17·195
39	90 245	794	23 591	398 734	10 107·36	16·902
40	89 451	837	22 593	375 143	9 906·82	16·605
41	88 614	882	21 624	352 550	9 702·57	16·303
42	87 732	930	20 685	330 926	9 494·61	15·998
43	86 802	980	19 774	310 241	9 282·75	15·689
44	85 822	1 033	18 889	290 467	9 067·05	15·377
45	84 789	1 089	18 031	271 578	8 847·37	15·062
46	83 700	1 148	17 198	253 547	8 623·61	14·743
47	82 552	1 211	16 388	236 349	8 395·71	14·422
48	81 341	1 275	15 602	219 961	8 163·43	14·098
49	80 066	1 342	14 838	204 359	7 927·15	13·773
50	78 724	1 414	14 096	189 521	7 686·86	13·445
51	77 310	1 486	13 375	175 425	7 442·24	13·117
52	75 824	1 562	12 674	162 050	7 193·86	12·786
53	74 262	1 639	11 993	149 376	6 941·60	12·455
54	72 623	1 720	11 331	137 383	6 685·87	12·124
55	70 903	1 801	10 689	126 052	6 426·56	11·792
56	69 102	1 884	10 065	115 363	6 164·23	11·461
57	67 218	1 967	9 459·6	105 298·4	5 899·09	11·132
58	65 251	2 050	8 872·8	95 838·8	5 631·62	10·801
59	63 201	2 133	8 303·3	86 966·0	5 362·29	10·474

Sterblichkeits-Tafel AH^M.

3½%.

l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x	x
61 068	2 213	7 751·4	78 662·7	5 091·55	10·148	60
58 855	2 292	7 218 0	70 911·3	4 820·15	9·8242	61
56 563	2 367	6 702 1	63 693·3	4 548·57	9·5034	62
54 196	2 438	6 204·9	56 991·2	4 277·57	9·1848	63
51 758	2 502	5 725 5	50 786·3	4 007·88	8·8702	64
49 256	2 560	5 264·5	45 060·8	3 740·47	8 5594	65
46 696	2 609	4 821·8	39 796 3	3 476·12	8 2533	66
44 087	2 647	4 398·5	34 974·5	3 215·82	7·9515	67
41 440	2 675	3 994·6	30 576·0	2 960·66	7·6543	68
38 765	2 690	3 610 4	26 581·4	2 711·52	7·3623	69
36 075	2 691	3 246·2	22 971·0	2 469·46	7·0762	70
33 384	2 677	2 902·5	19 724 8	2 235·50	6·7959	71
30 707	2 646	2 579·5	16 822·3	2 010·62	6·5215	72
28 061	2 599	2 277·5	14 242·8	1 795·87	6·2538	73
25 462	2 533	1 996·7	11 965 3	1 592·06	5·9925	74
22 929	2 450	1 737·2	9 968·6	1 400·14	5·7382	75
20 479	2 351	1 499·1	8 231·4	1 220·79	5·4907	76
18 128	2 234	1 282·2	6 732·3	1 054·51	5·2508	77
15 894	2 102	1 086·1	5 450·1	901·85	5·0178	78
13 792	1 958	910·63	4 364·02	763·06	4·7923	79
11 834	1 802	754·93	3 453·39	638·15	4·5745	80
10 032	1 638	618·33	2 698·46	527·079	4·3642	81
8 394	1 468	499·87	2 080·13	429·534	4·1613	82
6 926	1 299	398·51	1 580·26	345·068	3·9655	83
5 627	1 129	312·82	1 181·75	272·854	3 7779	84
4 498	966	241·60	868·93	212·213	3·5966	85
3 532	812	183·30	627·33	162·081	3·4225	86
2 720	668	136·38	444·03	121·367	3·2557	87
2 052	538	99·409	307·646	89·006	3·0948	88
1 514	424	70·866	208·237	63·824	2·9385	89
1 090	325	49·294	137·371	44·649	2·7867	90
765	243	33·427	88 077	30·448	2·6349	91
522	177	22·037	54·650	20·1891	2·4799	92
345	124	14 072	32·613	12·9694	2·3175	93
221	84	8·7096	18·5412	8·0826	2·1288	94
137	56	5·2165	9 8316	4·8841	1·8847	95
81	35	2·9800	4·6151	2·8239	1·5487	96
46	46	1·6351	1·6351	1·5798	1·0000	97

Vergleich der

Alter	Von 1000 Lebenden am Anfang des Jahres sterben im Laufe des Jahres nach der				Alter
	Deutschen Rentner-Sterbetafel	Tafel der 17 engl. Gesellschaften	Deutschen Sterblichkeitstafel MWI	Österr.-ung. Sterblichkeitstafel AH[M] *	
20	—	7·29	9·19	3·49	20
21	—	7·38	9·17	3·62	21
22	—	7·46	9·03	3·76	22
23	—	7·56	8·84	3·91	23
24	—	7·67	8·66	4·07	24
25	3·54	7·77	8·54	4·24	25
26	3·58	7·89	8·48	4·43	26
27	3·63	8·01	8·48	4·64	27
28	3·71	8·14	8·54	4 86	28
29	3·79	8·26	8·67	5·09	29
30	3·90	8·43	8·83	5·35	30
31	4·02	8·58	9·01	5·63	31
32	4·13	8·75	9·23	5·93	32
33	4·27	8·92	9·45	6·25	33
34	4·40	9·10	9·70	6·60	34
35	4·56	9·29	9·98	6·98	35
36	4·73	9·49	10·27	7·38	36
37	4·92	9·69	10·59	7·82	37
38	5·16	9·91	10·95	8·29	38
39	5·41	10·13	11·33	8·81	39
40	5·69	10·36	11·77	9·36	40
41	6·02	10·61	12·29	9·95	41
42	6·42	10·89	12·79	10·60	42
43	6·84	11·25	13·32	11·29	43
44	7·31	11·70	13·85	12·04	44
45	7·85	12·21	14·37	12·85	45
46	8·42	12·84	14·89	13·72	46
47	9·06	13·52	15·50	14·66	47
48	9·72	14·26	16·21	15·67	48
49	10·40	15·06	17·06	16·77	49
50	11·15	15·94	18·14	17·95	50
51	11·94	16·90	19·31	19·22	51
52	12·74	17·95	20·61	20·60	52
53	13·58	19·09	21·99	22·08	53
54	14·59	20·31	23·49	23·68	54
55	15·67	21·66	25·05	25·40	55
56	16·84	23·13	26·80	27·26	56
57	18·09	24·68	28·67	29·26	57
58	19·43	26·37	30·73	31·42	58
59	20·88	28·25	32·89	33·75	59

* Gesamtmaterial Männer.

Sterbenswahrscheinlichkeiten.

Alter	Von 1000 Lebenden am Anfang des Jahres sterben im Laufe des Jahres nach der				Alter
	Deutschen Rentner-Sterbetafel	Tafel der 17 engl. Gesellschaften	Deutschen Sterblichkeitstafel MWI	Österr.-ung. Sterblichkeitstafel AH[M] *	
60	22·43	30·34	35·36	36·25	60
61	24·22	32·61	37·82	38·95	61
62	26·16	35·12	40·42	41·85	62
63	28·24	37·84	43·17	44·98	63
64	30·50	40·83	46·13	48·34	64
65	33·25	44·08	49·43	51·97	65
66	36·25	47·61	53·29	55·86	66
67	39·52	51·47	57·62	60·05	67
68	43·08	55·63	62·26	64·56	68
69	46·96	60·09	67·31	69·40	69
70	51·19	64·93	72·76	74·60	70
71	55·80	70·16	78·56	80·18	71
72	60·82	75·81	84·59	86·17	72
73	66·25	81·88	91·30	92·60	73
74	71·82	88·47	98·54	99·49	74
75	77·85	95·56	106·49	106·87	75
76	84·39	103·18	114·51	114·78	76
77	91·48	111·47	123·12	123·24	77
78	99·16	120·44	132·33	132·28	78
79	107·49	130·07	142·19	141·94	79
80	116·50	140·41	155·14	152·26	80
81	127·65	151·44	169·74	163·26	81
82	139·87	163·19	184·51	174·98	82
83	153·25	175·91	198·25	187·46	83
84	167·92	189·68	211·12	200·72	84
85	183·98	205·10	222·00	214·80	85
86	201·58	222·48	228·05	229·73	86
87	220·88	242·23	233·68	245·53	87
88	242·02	265·27	237·88	262·23	88
89	265·19	292·38	243·16	279·86	89
90	289·75	323·73		298·42	90
91	320·25	360·99		317·93	91
92	352·65	405·26		338·39	92
93	388·35	457·23		359·80	93
94	427·65	516·30		382·14	94
95	469·85	584·27		405·40	95
96	516·20	648·65		429·53	96
97	643·45	692·31		454·50	97
98	802·05	750·00			98
99	1000·00	1000·00			99

* Gesamtmaterial Männer.





END OF
TITLE